Colles semaine 5

En bref

- Exemples de raisonnements par analyse-synthèse.
- Nombres complexes :
  - Calcul algébrique, module, conjugaisons, partie réelle et imaginaire.
  - Cas des complexes de module 1, définition de l'argument et notation trigonométrique $re^{i\theta}$.
  - Passage de l'écriture algébrique à une écriture trigonométrique et vice-versa.
  - Représentation géométrique incluant notamment l'inégalité triangulaire et ses cas d'égalité.
- Formules de Moivre et d'Euler, application à la linéarisation ou délinéarisation d'expression trigonométrique.
- Technique de factorisation par angle-moitié et application pour retrouver la factorisation de $\cos(a) + \cos(b)$ par exemple.
- Exponentielle d'un complexe.
- Exemples de problème géométrique résolu avec les complexes :
  - Caractérisation de la colinéarité de vecteur ou de l'alignement des points. Équation complexe de droites.
  - Équation complexe de la médiatrice d'un segment donné.
  - Équation complexe d'un cercle de centre et rayon donné.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Montrer par analyse-synthèse l'existence et l'unicité d'une fonction f paire et d'une fonction g impaire telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + g(x) = e^x$.
- Montrer qu'un complexe z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$.
- Définir le conjugué d'un complexe, interprétation géométrique ? Montrer que $\overline{zu} = \bar{z} \cdot \bar{u}$.
- Définir le module d'un complexe, interprétation géométrique ? Montrer que $|zu| = |z| \cdot |u|$.
- Citer et prouver l'inégalité triangulaire. (On pourra demander de citer sans preuve les cas d'égalité pour garder un temps raisonnable sur la question de cours).
- Citer puis prouver la formule $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$. *On imposera une preuve utilisant les complexes.*
- Linéariser l'expression $\cos^4(\theta)$.
- Dé-linéariser l'expression $\cos(4\theta)$ (dans ce contexte, cela signifie l'exprimer comme un polynôme en $\cos(\theta)$).
- Pour A et B deux points donnés du plan, déterminer une équation complexe de la droite (AB) ou de la médiatrice du segment $[AB]$.
- Pour A un point donné du plan et r un réel positif, donner l'équation complexe du cercle de centre A et de rayon r.
- Représenter géométriquement l'ensemble $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{z-1}{z+i} \in \mathbb{R}\right\}$ ou un autre exemple du même genre.

Note aux colleurs

- La résolution d'équation polynomiale complexe (notamment du second degré et l'étude des racines de l'unité) fera l'objet d'un chapitre ultérieur.

En détail

1 Exemples d'analyse-synthèse

Reprise du programme précédent

2 Nombres complexes

Reprise du programme précédent avec en plus :

2.1 Formules utilisant la notation exponentielle

Proposition 1 (Formules d'Euler). *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a :*

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \mathrm{Re}(e^{i\theta}) \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \mathrm{Im}(e^{i\theta}).$$

Proposition 2 (Formule de De Moivre). *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :*

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

2.2 Écriture trigonométrique d'un complexe : module et argument

Proposition-Définition 3. *Pour tout complexe* **non nul** *$z \in \mathbb{C}^*$, il existe $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = re^{i\theta}$. Le réel positif r de l'égalité est unique et vaut le module de z, $r = |z|$. Par ailleurs, il existe une infinité de valeur de θ correspondante, toutes congrues modulo 2π. Une telle valeur de θ est appelé un argument de z. L'unique telle valeur de θ de l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ est parfois appelée argument principal de z et se note $\mathrm{Arg}(z)$. Par ailleurs l'écriture $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ s'appelle forme trigonométrique de z.*

Corollaire 4. *Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls. Alors,*

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg(z_1) \equiv \arg(z_2)\ [2\pi] \end{cases}$$

Méthode 5. Comment passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique ?
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $z = a + ib$. On calcule $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, puis on cherche un argument θ de z tel que :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

On ne connaît pas toujours une solution simple de ce système !

2.3 Exponentielle complexe

Définition 6. Soit $z \in \mathbb{C}$, notons $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$ de sorte que $z = a + ib$. Alors, on pose $\exp(z) := \mathrm{e}^a\mathrm{e}^{ib}$

Lemme 7. *Pour tout complexe z, on a $|\mathrm{e}^z| = \exp(\mathrm{Re}(z))$ et $\arg(\mathrm{e}^z) = \mathrm{Im}(z)$. En particulier $\mathrm{e}^z \neq 0$.*

Proposition 8. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ \left(\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'}\right) \iff \left(\exists k \in \mathbb{Z},\ z = z' + 2\mathrm{i}k\pi\right)$.

2.4 Interprétation complexe de quelques situations géométriques

Proposition 9 (Équation complexe de droite). *Soit A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B ainsi que M un point quelconque d'affixe z. Alors M appartient à la droite (AB) si et seulement si son affixe vérifie $\frac{z-z_A}{z_B-z_A} \in \mathbb{R}$.*

Remarque 10. De plus M appartient au segment $[AB]$ si et seulement si son affixe vérifie $\frac{z-z_A}{z_B-z_A} \in [0\,;\,1]$.

2.4.1 Médiatrice

On rappelle que la médiatrice d'un segment $[AB]$ désigne le lieu des points qui sont équidistants à A et B.

Proposition 11 (Équation complexe de médiatrice)**.** *Soit A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B ainsi que M un point quelconque d'affixe z. Alors M appartient à la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si son affixe vérifie $\left|\frac{z-z_A}{z_B-z_A}\right| = 1$.*

2.4.2 Équations de cercle

Comme on sait calculer la distance entre deux points à l'aide du module, on peut facilement déterminer des équations de cercles.

Proposition 12 (Équation complexe de cercle)**.** *Soit A un point distinct d'affixe z_A et r un réel positif ainsi que M un point quelconque d'affixe z. Alors M appartient au cercle de centre A et de rayon r si et seulement si son affixe vérifie $(z - z_A)(\bar{z} - \bar{z_A}) = r^2$.*