

Colles semaine 6

En bref

- Représentation géométrique des complexes incluant notamment l'inégalité triangulaire et ses cas d'égalité.
- Formules de Moivre et d'Euler, application à la linéarisation ou délinéarisation d'expression trigonométrique.
- Technique de factorisation par angle-moitié et application pour retrouver la factorisation de $\cos(a) + \cos(b)$ par exemple.
- Exponentielle d'un complexe.
- Exemples de problème géométrique résolu avec les complexes : alignement de points, équation de droite, de médiatrice et de cercle.
- Système linéaire :
 - Résolution des systèmes triangulaires en distinguant les cas selon que les coefficients diagonaux sont nuls ou non.
 - Mise en pratique du pivot de Gauss pour triangulariser un système carré.
 - Notion de système de Cramer pour les systèmes carrés.
 - Structure de l'ensemble des solutions d'un système, lien entre les solutions d'un système et celles de son système homogène associé.
 - Brève généralisation aux systèmes non carrés.
- Calcul matriciel :
 - Addition et produit.
 - Cas des matrices carrées. Produit de matrices diagonales (ou triangulaires). Notion d'inversibilité, unicité de la matrice inverse en cas d'existence.
- Traduction matricielle des systèmes linéaires.
- . Calcul pratique de l'inverse d'une matrice carrée *Reporté à la semaine suivante.*

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Citer puis prouver la formule $\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$. On imposera une preuve utilisant les complexes.
- Linéariser l'expression $\cos^4(\theta)$.
- Dé-linéariser l'expression $\cos(4\theta)$ (dans ce contexte, cela signifie l'exprimer comme un polynôme en $\cos(\theta)$).
- Pour A et B deux points donnés du plan, déterminer une équation complexe de la droite (AB) ou de la médiatrice du segment $[AB]$.
- Pour A un point donné du plan et r un réel positif, donner l'équation complexe du cercle de centre A et de rayon r .
- Représenter géométriquement l'ensemble $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{z-1}{z+1} \in \mathbb{R}\right\}$ ou un autre exemple du même genre.
- Citer les liens entre nombre de solution d'un système et de son système homogène associé.
- Définir un système de Cramer, donner un critère simple permettant de reconnaître les systèmes de Cramer parmi les systèmes triangulaires.
- Citer la formule de produit matriciel. Montrer avec cette formule que le produit de deux matrices triangulaires inférieures est encore triangulaire inférieure.

Note aux colleurs

- La résolution d'équation polynomiale complexe (notamment du second degré et l'étude des racines de l'unité) fera l'objet d'un chapitre ultérieur.
- La propriété affirmant que l'unicité de la solution d'un système carré entraîne l'existence de la solution pour toute valeur du second membre est admise et connue des élèves sous le nom de « miracle des systèmes carrés ».
- Suite aux diverses évacuations et cours manquant, nous avons à peine effleuré le fait qu'un système carré est de Cramer si et seulement si sa matrice associé est inversible.

2.2 Structure de l'ensemble des solutions

Muni maintenant d'une certaine habileté calculatoire, nous nous efforçons de déterminer des théorèmes généraux quant à l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

2.2.1 Cas des systèmes homogènes

Remarque 7. Le p -uplet $(0, 0, \dots, 0)$ est toujours solution du système **homogène** $\mathcal{L}_0$.

Lemme 8 (Principe de linéarité). *Si $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est une solution particulière du système homogène $\mathcal{L}_0$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ le p -uplet $(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_p)$ est également solution. Si de plus $(x'_1, x'_2, \dots, x'_p)$ est une autre solution, alors $(x'_1 + x_1, x'_2 + x_2, \dots, x'_p + x_p)$ est également solution.*

Corollaire 9. *Un système linéaire homogène admet soit une unique, soit une infinité de solutions.*

2.2.2 Cas des systèmes avec second membre

Lemme 10. *Considérons deux p -uplets $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_p)$ et supposons que x soit solution du système $\mathcal{L}$. Alors y est solution de $\mathcal{L}$ si et seulement si le p -uplet $x - y$ est solution du système homogène $\mathcal{L}_0$.*

Théorème 11 (Structure de l'ensemble des solutions). *Notons $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_0$ les ensembles respectifs des solutions de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_0$. Soit également $X := (x_1, x_2, \dots, x_p)$ une solution particulière de $\mathcal{L}$. Alors, on peut écrire l'ensemble des solutions de $\mathcal{L}$ comme :*

$$\mathcal{S} = \{X + Y \mid Y \in \mathcal{S}_0\} = \{(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_p + y_p) \mid (y_1, y_2, \dots, y_p) \in \mathcal{S}_0\}$$

Autrement dit, on obtient à partir d'une solution particulière, toutes les solutions en ajoutant les solutions du système homogène.

Corollaire 12. *Un système linéaire admet soit aucune, soit une unique, soit une infinité de solutions.*

Proposition 13. *Pour un système linéaire $\mathcal{L}$ et son système homogène associé $\mathcal{L}_0$, nous avons les résultats suivants :*

- *Si $\mathcal{L}_0$ admet une unique solution, alors $\mathcal{L}$ admet soit aucune, soit une unique solution.*
- *Si $\mathcal{L}_0$ admet une infinité de solutions, alors $\mathcal{L}$ admet soit aucune, soit une infinité de solutions.*

Par ailleurs, pour les systèmes carrés, on peut être plus précis. Un système carré admet une et une unique solution si et seulement si le système homogène associé admet une unique solution. Il s'agit du « miracle des systèmes carrés ». Cette dernière précision reste admise pour le moment.

Définition 14 (Système de Cramer). *Un système linéaire carré est dit de Cramer s'il admet une unique solution.*

Corollaire 15. *Pour un système carré, la propriété d'être de Cramer ne dépend que du système homogène associé.*

Remarque 16 (Provisoirement admis). *Un système linéaire avec strictement moins d'équations que d'inconnues admet soit aucune, soit une infinité de solutions.*

3 Le formalisme matriciel

3.1 Matrices

3.1.1 Définition

Définition 17. Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On appelle matrice à n lignes et p colonnes un tableau de scalaires (réels ou complexes) $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

On la représente par un tableau rectangulaire $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficient dans $\mathbb{K}$ (c'est-à-dire que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne les matrices à coefficients réels et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ les matrices à coefficients complexes). On note simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes.

Définition 18 (Matrice nulle). *On appelle matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients valent zéro. On la note $0_{n,p}$ ou simplement 0_n pour la matrice nulle carrée de taille n .*

3.1.2 Calcul matriciel

Définition 19 (Addition de matrices de même format). Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ sont deux matrices de même format, alors on définit la somme $A + B$ comme la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ égale à

$$A + B = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ avec } \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket, c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

Attention ! La somme $A + B$ n'est définie que si les matrices A et B sont de même format.

Définition 20 (Multiplication externe). Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une matrice et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors on définit le produit $\lambda \cdot A$ comme la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ égale à

$$\lambda \cdot A = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ avec } \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket, c_{i,j} = \lambda a_{i,j}$$

Proposition 21. Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Les opérations d'addition et de produit externes des matrices $n \times p$ vérifient les règles suivantes. Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a :

- i) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.
- ii) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
- iii) $A + B = B + A$.

Définition 22 (Produit matriciel). Soit n, p et q trois entiers naturels non nuls. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$, alors on définit le produit AB comme la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{C})$ égale à

$$AB = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} \text{ où } \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1; q \rrbracket, c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$$

Attention ! Le produit AB est défini uniquement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .

Attention ! Soit n, p et q trois entiers naturels non nuls. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

L'égalité $AB = 0_{n,q}$ **n'implique pas** en général que l'une des deux matrices A ou B est nulle.

Attention. Le produit n'est pas commutatif ! On **n'a pas** en général $AB = BA$. Premièrement l'un de ces termes peut être défini sans que l'autre ne le soit. Deuxièmement même lorsque ces deux termes ont un sens (le lecteur se demandera quand se produit ce cas), ils peuvent être de formats différents. Troisièmement, lorsque ces deux termes existent et sont de même format, ils peuvent encore être différents.

Les autres règles de calcul restent valables :

Proposition 23. Soit A, B et C trois matrices (le lecteur déterminera les formats nécessaires pour que les égalités aient un sens) et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. On peut alors écrire, sous réserve que les termes suivants aient un sens :

- i) $A(B + C) = AB + AC$.
- ii) $(A + B)C = AC + BC$.
- iii) $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.
- iv) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
- v) $(AB)C = A(BC)$.

3.2 Cas des matrices carré

3.3 Terminologie spécifique aux matrices carrées

Proposition-Définition 24 (Matrice identité). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe une unique matrice I_n qui est un élément neutre à droite pour le produit matriciel. C'est-à-dire une matrice I_n vérifiant

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), MI_n = M.$$

Il existe également une unique matrice I_n qui est un élément neutre à gauche pour le produit matriciel. C'est-à-dire une matrice I_n vérifiant $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), I_n M = M$.

Ces deux matrices sont en fait les mêmes, on l'appelle la matrice identité et on la note I_n et on a :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 25 (Matrices diagonales). Une matrice carrée $D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est dite diagonale si $d_{i,j} = 0$ dès que $i \neq j$.

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

Définition 26 (Matrices triangulaires). Les matrices triangulaires peuvent être inférieures ou supérieures.

— Une matrice carrée $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est dite triangulaire supérieure lorsque $t_{i,j} = 0$ dès que $i > j$.

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} \\ 0 & t_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

— Une matrice carrée $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est dite triangulaire inférieure lorsque $t_{i,j} = 0$ dès que $i < j$.

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ t_{2,1} & t_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ t_{n,1} & \dots & t_{n,n-1} & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

Remarque 27. Les matrices diagonales sont exactement les matrices qui sont à la fois triangulaires supérieures et triangulaires inférieures

Proposition 28 (Produit de matrices diagonales ou triangulaires). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, D_1, D_2 deux matrices diagonales, $D_1 =$

$$D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}, \text{ alors } \alpha D_1, D_1 + D_2 \text{ et}$$

$$D_1 D_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \mu_n \end{pmatrix} \text{ sont des matrices diagonales.}$$

On dit que l'ensemble des matrices diagonales $\mathcal{D}_n$ est stable par produit.

Soit T_1, T_2 deux matrices triangulaires supérieures et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\alpha T_1, T_1 + T_2$ et $T_1 T_2$ sont des matrices triangulaires supérieures. L'ensemble des matrices triangulaires supérieures $\mathcal{T}_n^+$ est stable par produit, de même pour $\mathcal{T}_n^-$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.

3.3.1 Inversibilité des matrices carrées

Définition 29. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que M est inversible si $\exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA = I_n$. On appelle groupe linéaire d'ordre n et on note $\text{GL}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Attention ! Il existe des matrices non nulles qui ne sont pas inversibles.

Exercice 30. Prouver que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Proposition 31 (unicité de l'inverse). Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors

$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, AM = BM \Leftrightarrow A = B$. Ainsi l'inverse d'une matrice (s'il existe) est unique et on le note M^{-1} .

Proposition 32. Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. Si A et B sont inversibles, alors le produit AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3.4 Lien avec les systèmes linéaires

3.4.1 Principe général

Proposition 33 (Remarque fondamentale). Soit (S) le système linéaire de la notation ???. On pose

$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), B = (b_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $X = (x_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$. Alors,

le p -uplet $(x_1, \dots, x_p)$ est solution de (S) si, et seulement si $AX = B$.

3.4.2 Lien avec l'inversibilité

Reporté à a semaine prochaine

3.5 Détermination pratique de l'inverse par opérations élémentaires

Reporté à la semaine prochaine