Colles semaine 8

En bref

- Traduction matricielle des systèmes linéaires.
- Calcul pratique de l'inverse d'une matrice carrée par résolution de système associé.
- Transposition de matrices
- Trace des matrices carrées.
- Puissances de matrices carrées. Définition et formule du binôme pour les matrices qui commutent.
- Étude des applications entre ensembles :
  - Définition des injections, surjections et bijection.
  - Bijection réciproque des bijections. Propriétés caractéristique $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ si f est une bijection de E sur F.
  - Images directes et images réciproques de sous-ensemble par une fonction.
  - Cas des fonctions définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles : les fonction strictement monotones sont injectives. les fonctions continues injectives sont strictement monotones. Théorème des valeurs intermédiaires.
  - Théorème de la bijection pour les fonctions réelles.
  - Dérivabilité des bijections réciproques pour les fonctions réelles.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Montrer que si A et B sont deux matrices carrées de même format, alors $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$. *On limite la preuve aux matrices carrées pour simplifier les notations mais le résultat s'étend dès eu le produit AB a un sens.*
- Montrer que si A et B sont deux matrices carrées de même format ; alors $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. *Idem, on limite la preuve aux matrices carrées mais le résultat s'étend dès que le produit AB est bien défini et est une matrice carrée.*
- Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) est encore triangulaire supérieure (respectivement inférieure).
- Montrer que la composée de deux injections (respectivement surjections) est injective (respectivement injective).
- Pour $f : E \to F$ et A_1, A_2 deux sous-ensembles de E. Comparer $f(A_1 \cup A_2)$ et $f(A_1) \cup f(A_2)$. *ou idem pour l'intersection.*
- Pour $f : E \to F$ et B_1, B_2 deux sous-ensembles de F. Comparer $f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ et $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. *ou idem pour l'intersection.*
- Pour $f : E \to F$ et A un sous-ensemble de E ; comparer $f^{-1}(f(A))$ et A.
- Pour $f : E \to F$ et B un sous-ensemble de F ; comparer $f(f^{-1}(B))$ et B.
- Étudier la dérivée de arcsin (ou arccos ou arctan) à l'aide du théorème de dérivation des bijections réciproques.

Note aux colleurs

- Un étudiant qui appliquerait une formule du binôme matriciel sans vérifier l'hypothèse de commutation se verra infliger un long sermon sur les principes logiques de base.
- Les fonctions trigonométriques réciproques ne sont au programme cette semaine qu'à titre d'illustration du théorème de dérivation des réciproques. On évitera les exercices nécessitant une étude fine de ces fonctions.

En détail

Transposition, inversion, trace et puissances de matrices carrées

Reprise du programme précédent

1 Injection, surjection, bijection

1.1 Injection

Définition 1 (Injection)**.** Soit f une fonction entre deux ensembles E et F. On dit que f est *injective* si

$$\forall (x,x') \in E^2,\ \Big(f(x) = f(x')\Big) \implies (x = x')$$

Proposition 2 (Unicité des antécédents pour les fonctions injectives)**.** *Une fonction f de E dans F est injective si et seulement si tout élément de F admet au plus un antécédent.*

1.2 Surjection

Définition 3 (Surjection)**.** Soit f une fonction entre deux ensembles E et F. On dit que f est *surjective* si

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$$

Proposition 4 (Existence des antécédents pour les fonctions surjectives)**.** *Une fonction f de E dans F est surjective si et seulement si tout élément de F admet au moins un antécédent.*

1.3 Bijection

Définition 5. Une fonction de E dans F est dite *bijective* si elle est à la fois injective et surjective.

Proposition-Définition 6 (Application réciproque d'une bijection)**.** *Soit f une fonction bijective de E dans F. Alors on peut définir une fonction qui à tout élément de F associe son unique antécédent par f. Cette fonction ainsi définie de F dans E est appelée réciproque de f et se note f^{-1}.*

Remarque 7. La définition d'une réciproque suppose que f est bijective. Aussi on n'écrira jamais f^{-1} avant d'avoir prouvé ou supposé que f était bien bijective.

Proposition 8. *Soit $f : E \to F$ une bijection. Alors $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$.*

Corollaire 9. *Soit $f : E \to F$ une bijection. Alors sa réciproque f^{-1} est encore une bijection de F sur E. De plus, la réciproque de f^{-1} est la fonction f elle-même.*

Proposition 10 (Réciproque partielle de la proposition 8)**.** *Soit Soit $f : E \to F$ une fonction. S'il existe une fonction $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$; alors f est bijective et la fonction g est la réciproque de f.*

Corollaire 11. *Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications de sorte que $g \circ f$ soit bien défini. Si f et g sont chacune bijective, alors $g \circ f$ est bijective et sa réciproque est donnée par $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

2 Images directes et réciproques de sous-ensembles par une application

2.1 Images directes

Définition 12 (Images directes)**.** Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application entre ces deux ensembles. Soit également A un sous-ensemble de E. On appelle image directe de A (par f) et on note $f(A)$ le sous-ensemble de F suivant :

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$$

Remarque 13. Une fonction $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $f(E) = F$. Par ailleurs si $f(E)$ est un sous-ensemble strict de F, on peut toujours dire que f est surjective sur $f(E)$.

2.2 Images réciproques

Définition 14 (Images réciproques)**.** Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application entre ces deux ensembles. Soit également B un sous-ensemble de F. On appelle image réciproque de B (par f) et on note $f^{-1}(B)$ le sous-ensemble de E suivant :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Remarque 15 (Images réciproques et bijection). Si l'on se donne $f : E \to F$ une fonction *bijective* et B un sous-ensemble de F, la notation $f^{-1}(B)$ est à priori ambiguë. Elle peut désigner soit l'image réciproque de B par f, soit l'image directe de B par f^{-1}. Heureusement, ces deux notions correspondent exactement au même ensemble comme sait e prouver tout bon étudiant de PTSI.

2.3 Quelques comparaisons à savoir prouver

Proposition 16 (Images réciproques et unions/intersection)**.** *Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application entre ces ensembles. Alors :*

i) Pour tout $B_1 \subset F$ et $B_2 \subset F$, on a $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

ii) Pour tout $B_1 \subset F$ et $B_2 \subset F$, on a $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Proposition 17 (Images directes et unions/intersection)**.** *Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application entre ces ensembles. Alors :*

i) Pour tout $A_1 \subset E$ et $A_2 \subset E$, on a $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

ii) Pour tout $A_1 \subset E$ et $A_2 \subset E$, on a $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

Pour le dernier cas, le lecteur est invité à chercher des exemples montrant que l'inclusion peut être stricte.

Proposition 18 (Composition d'image directe et réciproque)**.** *Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application entre ces ensembles. Soit également A une partie de E et B une partie de F. Alors :*

i) $f^{-1}(f(A)) \supset A$.

ii) $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Là encore, le lecteur est invité à chercher des exemples prouvant que ces inclusions peuvent être strictes.

3 Le cas des fonctions réelles

3.1 Résultats préliminaires

3.1.1 théorèmes provisoirement admis

Théorème 19 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $[c\,; d]$ un autre intervalle de $\mathbb{R}$. Soit également $f : I \to [c\,; d]$ une fonction continue. Si c et d admettent chacun un antécédent, alors la fonction f est surjective sur l'intervalle $[c\,; d]$.*

Théorème 20 (Théorème des valeurs intermédiaires (autre point de vue))**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I à valeurs réelles. Alors, pour tout intervalle $J \subset I$, l'image directe $f(J)$ est encore un intervalle.*

Théorème 21 (Image des segments par les fonctions continues)**.** *Soit I un intervalle* ***fermé et borné*** *(on dit aussi un segment) de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I à valeur dans $\mathbb{R}$ et continue. Alors, l'image directe $f(I)$ est un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$.*

3.1.2 Théorèmes à savoir prouver

Lemme 22. *Soit fonction f définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est strictement monotone, alors elle est injective.*

Proposition 23 (Réciproque partielle du lemme précédent)**.** *Soit fonction f définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est continue et injective, alors elle est strictement monotone.*

3.2 Théorème de la bijection et continuité des réciproques

Théorème 24 (Théorème de la bijection)**.** *Soit $[a\,;\,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $[a\,;\,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est une fonction continue et strictement monotone, alors elle réalise une bijection entre les intervalles $[a\,;\,b]$ et J où J est l'intervalle définie par :*
- *$J = [f(a)\,;\,f(b)]$ si f est strictement croissante.*
- *$J = [f(b)\,;\,f(a)]$ si f est strictement décroissante.*

De plus, la réciproque de f est encore une bijection entre J et $[a\,;\,b]$ qui a même sens de variation que f et qui est également continue.

Théorème 25 (Théorème de la bijection, version aux limites)**.** *Soit $]a\,;\,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $]a\,;\,b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que f admet des limites en a et b que l'on note respectivement ℓ_a et ℓ_b. Si f est une fonction continue et strictement monotone, alors elle réalise une bijection entre les intervalles $]a\,;\,b[$ et J où J est l'intervalle définie par :*
- *$J =]\ell_a\,;\,\ell_b[$ si f est strictement croissante.*
- *$J =]\ell_b\,;\,\ell_a[$ si f est strictement décroissante.*

De plus, la réciproque de f est encore une bijection entre J et $]a\,;\,b[$ qui a même sens de variation que f et qui est également continue.
Ce théorème reste valables si les bornes a et b ou les limites ℓ_a et ℓ_b sont infinies.

3.3 Dérivabilité des bijections réciproques

Proposition 26 (Dérivée des réciproques)**.** *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une bijection de I sur J. Soit également $x \in I$ et $y = f(x) \in J$. On suppose que f est dérivable en x. Alors f^{-1} est dérivable en y si et seulement si $f'(x) \neq 0$, et dans ce cas :*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

3.4 Application aux fonctions trigonométriques réciproques

Proposition-Définition 27 (fonction Arcsinus)**.** *La fonction sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1\,;\,1]$. Sa réciproque s'appelle la fonction arcsinus et se note* arcsin *. Pour tout $y \in [-1\,;\,1]$,* $\arcsin(y)$ *est donc défini comme l'unique réel $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ vérifiant* $\sin(\theta) = y$.

Théorème 28. *La fonction Arcsinus : $[-1\,;\,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ est une fonction bijective, impaire strictement croissante. Elle est dérivable sur $]-1\,;\,1[$ et*

$$\forall y \in\,]-1\,;\,1[\,,\ \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Proposition-Définition 29 (fonction Arccosinus)**.** *La fonction cosinus réalise une bijection de $[0\,;\,\pi]$ sur $[-1\,;\,1]$. Sa réciproque s'appelle la fonction arccosinus et se note* arccos *. Pour tout $y \in [-1\,;\,1]$,* $\arccos(y)$ *est donc défini comme l'unique réel $\theta \in [0\,;\,\pi]$ vérifiant* $\cos(\theta) = y$.

Théorème 30. *La fonction Arccosinus : $[-1\,;\,1] \to [0\,;\,\pi]$ est une fonction bijective et strictement décroissante. Elle est dérivable sur $]-1\,;\,1[$ et*

$$\forall y \in\,]-1\,;\,1[\,,\ \arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Remarque 31. La fonction arccosinus n'est ni paire ni impaire.

Proposition-Définition 32 (fonction Arctan). *La fonction tangente réalise une bijection de* $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $]-\infty\,;\,+\infty[$. *Sa réciproque s'appelle la fonction arctangente et se note* $\arctan$. *Pour tout* $y \in \mathbb{R}$, $\arctan(y)$ *est donc défini comme l'unique réel* $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ *vérifiant* $\tan(\theta) = y$.

Théorème 33. *La fonction Arctangente :* $\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ *est une fonction bijective, impaire strictement croissante. Elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$