Colles semaine 8

En bref

- Étude des applications entre ensembles :
  - Définition des injections, surjections et bijection.
  - Bijection réciproque des bijections. Propriétés caractéristique $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ si f est une bijection de E sur F.
  - Images directes et images réciproques de sous-ensemble par une fonction.
  - Cas des fonctions définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles : les fonction strictement monotones sont injectives. les fonctions continues injectives sont strictement monotones. Théorème des valeurs intermédiaires.
  - Théorème de la bijection pour les fonctions réelles.
  - Dérivabilité des bijections réciproques pour les fonctions réelles.
  - Application à l'étude des fonctions trigonométriques réciproques, arcsin, arccos et arctan.
- Résolution des équations polynomiales complexes de degré 2.
- Résolution de $\delta^2 = \Delta$ d'inconnue $\delta \in \mathbb{C}$ sous forme trigonométrique ou sous forme algébrique.
- Utilisation pour la résolution de $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Pour cette semaine, chaque étudiant aura en guise de question de cours à résoudre une équation du second degré à coefficients complexes. On vérifiera qu'il a bien compris la méthode

On poursuivra ensuite la colle avec des exercice à propos des applications entre ensemble, notamment des application réelles. ce qui permettra d'appliquer les connaissances sur le théorème de la bijection, la dérivabilité des bijections réciproques et les propriétés des fonctions arcsin, arccos et arctan.

Notes aux colleurs

- Je m'interdis pour ma part d'utiliser le terme « racine carrée » pour les complexes. Si les étudiants s'y autorisent, ce sera à leurs risques et périls. En particulier toute utilisation de symbole $\sqrt{z}$ sans vérifier que z est un réel positif sera considérée comme une faute grave et durement sanctionnée.
- Je n'ai pas encore eu le temps de corriger en classe un exemple d'étude de suite implicite. Il ne faut pas attendre des étudiants qu'ils connaissent une méthode dans ce cas.

En détail

1 Injection, surjection, bijection

Reprise du programme précédent en mettant l'accent sur :

1.1 Théorème de la bijection et continuité des réciproques

Théorème 1 (Théorème de la bijection). *Soit $[a\,;\,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $[a\,;\,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est une fonction continue et strictement monotone, alors elle réalise une bijection entre les intervalles $[a\,;\,b]$ et J où J est l'intervalle définie par :*
- *$J = [f(a)\,;\,f(b)]$ si f est strictement croissante.*
- *$J = [f(b)\,;\,f(a)]$ si f est strictement décroissante.*

De plus, la réciproque de f est encore une bijection entre J et $[a\,;\,b]$ qui a même sens de variation que f et qui est également continue.

Théorème 2 (Théorème de la bijection, version aux limites). *Soit $]a\,;\,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $]a\,;\,b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que f admet des limites en a et b que l'on note respectivement ℓ_a et ℓ_b. Si f est une fonction continue et strictement monotone, alors elle réalise une bijection entre les intervalles $]a\,;\,b[$ et J où J est l'intervalle définie par :*
- *$J =]\ell_a\,;\,\ell_b[$ si f est strictement croissante.*
- *$J =]\ell_b\,;\,\ell_a[$ si f est strictement décroissante.*

De plus, la réciproque de f est encore une bijection entre J et $]a\,;\,b[$ qui a même sens de variation que f et qui est également continue.
Ce théorème reste valables si les bornes a et b ou les limites ℓ_a et ℓ_b sont infinies.

1.2 Dérivabilité des bijections réciproques

Proposition 3 (Dérivée des réciproques). *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une bijection de I sur J. Soit également $x \in I$ et $y = f(x) \in J$. On suppose que f est dérivable en x. Alors f^{-1} est dérivable en y si et seulement si $f'(x) \neq 0$, et dans ce cas :*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

1.3 Application aux fonctions trigonométriques réciproques

Proposition-Définition 4 (fonction Arcsinus). *La fonction sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1\,;\,1]$. Sa réciproque s'appelle la fonction arcsinus et se note* $\arcsin$. *Pour tout $y \in [-1\,;\,1]$,* $\arcsin(y)$ *est donc défini comme l'unique réel $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ vérifiant* $\sin(\theta) = y$.

Théorème 5. *La fonction Arcsinus : $[-1\,;\,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ est une fonction bijective, impaire strictement croissante. Elle est dérivable sur $]-1\,;\,1[$ et*

$$\forall y \in]-1\,;\,1[,\ \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Proposition-Définition 6 (fonction Arccosinus). *La fonction cosinus réalise une bijection de $[0\,;\,\pi]$ sur $[-1\,;\,1]$. Sa réciproque s'appelle la fonction arccosinus et se note* $\arccos$. *Pour tout $y \in [-1\,;\,1]$,* $\arccos(y)$ *est donc défini comme l'unique réel $\theta \in [0\,;\,\pi]$ vérifiant* $\cos(\theta) = y$.

Théorème 7. *La fonction Arccosinus : $[-1\,;\,1] \to [0\,;\,\pi]$ est une fonction bijective et strictement décroissante. Elle est dérivable sur $]-1\,;\,1[$ et*

$$\forall y \in]-1\,;\,1[,\ \arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Remarque 8. La fonction arccosinus n'est ni paire ni impaire.

Proposition-Définition 9 (fonction Arctan). *La fonction tangente réalise une bijection de* $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $]-\infty\,;\,+\infty[$. *Sa réciproque s'appelle la fonction arctangente et se note* arctan. *Pour tout* $y \in \mathbb{R}$, $\arctan(y)$ *est donc défini comme l'unique réel* $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ *vérifiant* $\tan(\theta) = y$.

Théorème 10. *La fonction Arctangente :* $\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ *est une fonction bijective, impaire strictement croissante. Elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

2 Équations polynomiales complexes

2.1 Cas du degré 2

2.1.1 Résolution de $z^2 = w$

Lemme 11. *L'équation* $z^2 = 0$ *d'inconnue* $z \in \mathbb{C}$ *admet une et une unique solution qui est* $z = 0$.

Proposition 12 (Résolution trigonométrique). *Soit* $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$. *On note* $w = \rho \mathrm{e}^{\,i\alpha}$ *un complexe* ***non nul*** *donné sous forme trigonométrique.*

Alors, l'équation $z^2 = w$ *d'inconnue* $z \in \mathbb{C}$ *admet exactement deux solutions qui sont :*

$$z_1 = \sqrt{\rho}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad z_2 = \sqrt{\rho}\exp\left(\mathrm{i}\pi + \mathrm{i}\frac{\alpha}{2}\right).$$

Corollaire 13 (Bilan sur le nombre de solutions). *Pour un complexe* w *fixé, l'équation* $z^2 = w$ *d'inconnue* $z \in \mathbb{C}$ *admet :*

- *une unique solution si* $w = 0$,
- *deux solutions opposées, l'une de l'autre si* $w \neq 0$.

Méthode 14 (Résolution sous forme algébrique). Soit A et B deux réels, on note $w = A + \mathrm{i}B$ un complexe fixé donné sous forme algébrique. On cherche les solutions de $z^2 = w$ sous forme algébrique en posant $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$. On écrit alors l'égalité $(a + \mathrm{i}b)^2 = A + \mathrm{i}B$, puis :

1) On écrit l'égalité des parties réelles,
2) On écrit l'égalité des modules,
3) Ceci nous donne un système de deux équations sur les inconnues (a^2, b^2).
4) On résout ce système (il est toujours de Cramer), ce qui fixe les valeurs de a^2 et b^2. On a alors quatre couple de candidats-solutions pour (a, b).
5) On écrit l'égalité des parties imaginaires (en fait, il suffit de considérer le signe) pour éliminer deux des quatre candidats-solutions. Il nous reste alors les deux véritables solutions.

2.1.2 Application à la résolution générale du degré 2

Proposition 15 (Equation du second degré à coefficients complexes). *Soient* a, b *et* c *trois nombres complexes avec* $a \neq 0$. *On considère l'équation :*

$$(E) \qquad az^2 + bz + c = 0$$

on note $\Delta = b^2 - 4ac$ *son discriminant. Alors,*

- *Si* $\Delta \neq 0$, *en notant* δ *une solution de* $\delta^2 = \Delta$, *l'équation* (E) *admet exactement deux solutions qui sont :*
$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}.$$
- *Si* $\Delta = 0$, *l'équation* (E) *admet une unique solution (on parle de racine double) qui est :*
$$z_0 = -\frac{b}{2a}.$$