Colles semaine 10

En bref

— Théorème de la bijection et application à l'étude de suite implicite.
— Dérivabilité des bijections réciproques pour les fonctions réelles.
— Application à l'étude des fonctions trigonométriques réciproques, arcsin, arccos et arctan.
— Résolution des équations polynomiales complexes de degré 2.
— Résolution de $\delta^2 = \Delta$ d'inconnue $\delta \in \mathbb{C}$ sous forme trigonométrique ou sous forme algébrique.
— Utilisation pour la résolution de $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
— Racine n-ièmes de l'unité. Définition et propriété élémentaire, notamment leur somme vaut zéro.
— Application à la résolution de l'équation $z^n = w$ d'inconnue z pour un entier n et un complexe $w \neq 0$ fixés. L'ensemble de ces solutions sont les affixe des points d'un polygone régulier à n côtés.
— Principe de factorisation d'un polynôme connaissant une de ces racines. Application à la résolution d'équation de degré 3 lorsqu'une racine « évidente » existe.
— Relation coefficients-racines pour les polynômes de degré 2. Application pour trouver deux nombres dont la somme et le produit sont connus.
— Un polynôme de degré n admet au plus n racines.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

— Citer avec ou sans preuve la formule de dérivation de arcsin, arccos ou arctan.
— Calculer $\int_0^1 \frac{1}{4x^2+6x+13}$ ou tout autre exemple du même genre.
— Résoudre une équation complexe de degré 2.
— Déterminer avec démonstration l'ensemble des solutions de $z^n = 1$.
— Citer sans preuve le résultat précédent et en déduire avec démonstration que l'équation $z^n = w$ admet exactement n solutions (si $w \neq 0$).
— Déterminer deux complexes u et w vérifiant $\begin{cases} u + w = 5 \\ uw = 7 + \mathrm{i} \end{cases}$ ou tout autre exemple du même genre.

Notes aux colleurs

— Étudier une suite définie implicitement rentre parfaitement dans le cadre de ce programme. Les étudiants sont maintenant censés être des experts en la matière.
— Aucune théorie générale des polynômes n'a été développé. La plupart des résultats sont admis. En particulier, il n'est pas question d'évoquer la multiplicité des racines. On se concentre sur l'aspect pratique : factoriser lorsqu'une racine est connue et pouvoir écrire une égalité entre deux polynôme de degré n après avoir montré qu'ils coïncidaient en $n + 1$ valeurs.

En détail

1 Théorème de la bijection et continuité des réciproques

Application à l'étude de suite implicite

2 Application aux fonctions trigonométriques réciproques

Reprise du programme précédent.

3 Équations polynomiales complexes

3.1 Cas du degré 2

3.1.1 Résolution de $z^2 = w$

Lemme 1. *L'équation $z^2 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ admet une et une unique solution qui est $z = 0$.*

Proposition 2 (Résolution trigonométrique)**.** *Soit $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $w = \rho \mathrm{e}^{\,i\alpha}$ un complexe **non nul** donné sous forme trigonométrique.*

Alors, l'équation $z^2 = w$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ admet exactement deux solutions qui sont :

$$z_1 = \sqrt{\rho} \exp\left(\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}\right) \qquad et \qquad z_2 = \sqrt{\rho} \exp\left(\mathrm{i}\pi + \mathrm{i}\frac{\alpha}{2}\right).$$

Corollaire 3 (Bilan sur le nombre de solutions)**.** *Pour un complexe w fixé, l'équation $z^2 = w$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ admet :*

- *une unique solution si $w = 0$,*
- *deux solutions opposées, l'une de l'autre si $w \neq 0$.*

Méthode 4 (Résolution sous forme algébrique)**.** Soit A et B deux réels, on note $w = A + \mathrm{i}B$ un complexe fixé donné sous forme algébrique. On cherche les solutions de $z^2 = w$ sous forme algébrique en posant $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$. On écrit alors l'égalité $(a + \mathrm{i}b)^2 = A + \mathrm{i}B$, puis :

1) On écrit l'égalité des parties réelles,
2) On écrit l'égalité des modules,
3) Ceci nous donne un système de deux équations sur les inconnues (a^2, b^2).
4) On résout ce système (il est toujours de Cramer), ce qui fixe les valeurs de a^2 et b^2. On a alors quatre couple de candidats-solutions pour (a, b).
5) On écrit l'égalité des parties imaginaires (en fait, il suffit de considérer le signe) pour éliminer deux des quatre candidats-solutions. Il nous reste alors les deux véritables solutions.

3.1.2 Application à la résolution générale du degré 2

Proposition 5 (Equation du second degré à coefficients complexes)**.** *Soient a, b et c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. On considère l'équation :*

$$(E) \qquad az^2 + bz + c = 0$$

on note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. Alors,

- *Si $\Delta \neq 0$, en notant δ une solution de $\delta^2 = \Delta$, l'équation (E) admet exactement deux solutions qui sont :*
$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}.$$
- *Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une unique solution (on parle de racine double) qui est :*
$$z_0 = -\frac{b}{2a}.$$

4 Racines n-èmes

Définition 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a un complexe fixé. On appelle *racine n-ème de a* tout complexe z vérifiant $z^n = a$.

On appelle également *racine n-ème de l'unité* tout complexe z vérifiant $z^n = 1$.

4.1 Racines de l'unité

Notation 7. L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

Proposition 8. *Il existe exactement n racines de l'unité, ce sont les complexes de l'ensemble :*

$$\left\{1\,,\, \exp\left(\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}\right)\,,\, \exp\left(\frac{4\mathrm{i}\pi}{n}\right)\,,\, \ldots\,,\, \exp\left(\frac{2(n-1)\mathrm{i}\pi}{n}\right)\right\}$$

Ainsi,

$$\mathbb{U}_n = \left\{\exp\left(\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}\right) \;\mid\; k \in [\![0\,;\,n-1]\!]\right\}.$$

L'ensemble des racines de l'unité représente géométriquement les affixes d'un polygone régulier à n cotés inscrit dans le cercle trigonométrique. En particulier, le barycentre de ce polygone est l'origine du repère ; ce qui se traduit par la proposition suivante.

Proposition 9. *Soit n un entier au moins égal à 2. On a $\sum\limits_{z \in \mathbb{U}_n} z = 0$. Plus explicitement, cela signifie que si l'on pose $\omega = \exp\left(\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}\right)$, alors on a*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0.$$

4.2 Généralisation

Proposition 10. *Soit $w \in \mathbb{C}^*$. Posons $r = |a|$ et $\theta = \arg(a)$ de sorte que $a = re^{i\theta}$.*

i) Le nombre complexe a admet exactement n racines n-ièmes, ce sont les éléments de l'ensemble :

$$\left\{r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \;\mid\; k \in [\![0\,;\,n-1]\!]\right\}$$

ii) Si z_0 est une racine n-ième particulière de a alors les racines n-ièmes de a sont les $z_0 w_k$ avec $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ et où les w_k sont les racines n-ièmes de l'unité. L'ensemble des racines n-ièmes de a est donc $z_0\mathbb{U}_n = \{z_0 w\ ;\ w \in \mathbb{U}_n\}$.

iii) Les images dans le plan des racines n-ièmes de a sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés d'isobarycentre O.

5 Autres éléments de résolution d'équations polynomiales

Lemme 11 (Relation coefficients-racines pour le degré 2)**.** *Soit $P : z \mapsto az^2 + bz + c$ un polynôme de degré 2 (donc avec $a \neq 0$) et (z_1, z_2) ses deux racines (éventuellement $z_1 = z_2$ en cas de racine double).*

Alors $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

Proposition 12 (Principe d'identification des coefficients d'un polynôme)**.** *Soit $P : z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ et $Q : z \mapsto \sum_{k=0}^{n} b_k z^k$ deux polynômes. Si $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = Q(z)$; alors $\forall i \in [\![0\,;\,n]\!], a_i = b_i$.*

Proposition 13 (Principe de factorisation (Admis))**.** *Si P est un polynôme et z_0 une racine de P, alors il existe un polynôme Q tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z - z_0)Q(z)$.*

Théorème 14 (le nombre de racines est limité par le degré (Admis))**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme de degré au plus n. Si P admet $n+1$ racines DISTINCTES, alors il est constant nul (et donc tous ses coefficients sont nuls)*

Corollaire 15. *Le résultat précédent peut se reformuler de plusieurs façons.*

- *Si P est un polynôme de degré inconnu qui admet une infinité de racines DISTINCTES, alors il est constant nul.*
- *Si P et Q sont deux polynômes de degré au plus n et que l'on trouve $(z_0, \dots, z_n)$ une liste de $n+1$ complexes DISTINCTS tels que $\forall i \in [\![0\,;\,n]\!],\ P(z_i) = Q(z_i)$, alors les polynômes P et Q sont égaux.*
- *Si P et Q sont deux polynômes de degré inconnus et que l'on trouve $(z_0, \dots, z_n, \dots)$ une liste infinie de complexes DISTINCTS tels que $\forall i \in \mathbb{N},\ P(z_i) = Q(z_i)$, alors les polynômes P et Q sont égaux.*