Colles semaine 11

En bref

- Racine n-ièmes de l'unité. Définition et propriété élémentaire, notamment leur somme vaut zéro.
- Application à la résolution de l'équation $z^n = w$ d'inconnue z pour un entier n et un complexe $w \neq 0$ fixés. L'ensemble de ces solutions représente polygone régulier à n côtés.
- Principe de factorisation d'un polynôme connaissant une de ces racines. Application à la résolution d'équation de degré 3 lorsqu'une racine « évidente » existe.
- Relation coefficients-racines pour les polynômes de degré 2. Application pour trouver deux nombres dont la somme et le produit sont connus.
- Un polynôme de degré n admet au plus n racines.
- Équations différentielles linéaires :
  - Résolution des équation d'ordre 1 homogène.
  - Recherche de solution particulière pour l'ordre 1 avec second membre grâce à la méthode de variation de la constante.
  - Trouver toutes les solutions connaissant une solution particulière et les solutions de l'équation homogène associée (ordre 1 ou 2).
  - Résolution des équations linéaires d'ordre 2 **à coefficients constants**.
  - Recherche de solution particulière pour $ay'' + by' + cy = P(x)\mathrm{e}^{rx}$ où (a, b, c, r) sont des constantes fixées et P un polynôme.
  - Principe de superposition (ordre 1 ou 2). Application remarquable et remarquée pour résoudre $ay'' + by' + cy = P(x)\sin(\omega x)$.
  - Problème de Cauchy pour l'ordre 1 ou 2.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Déterminer avec démonstration l'ensemble des solutions de $z^n = 1$.
- Citer sans preuve le résultat précédent et en déduire avec démonstration que l'équation $z^n = w$ admet exactement n solutions (si $w \neq 0$).
- Déterminer deux complexes u et w vérifiant $\begin{cases} u + w = 5 \\ uw = 7 + \mathrm{i} \end{cases}$ ou tout autre exemple du même genre.
- Énoncer et démontrer le principe de superposition pour l'ordre 1.
- Énoncer et démontrer le théorème de structure pour l'ordre 1.
- Résoudre $y' + ay = \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$, pour une constante a fixé, ou un exemple approchant.
- Résoudre $y' + \frac{1}{x^2+x+1}y = 0$ sur $\mathbb{R}$, ou un exemple approchant.
- Résoudre $2y'' + 3y' + 5y = 0$ sur $\mathbb{R}$, ou un exemple approchant. *On pourra au choix demander les solutions à valeurs complexes ou réelles.*

Notes aux colleurs

- Aucune théorie générale des polynômes n'a été développé. La plupart des résultats sont admis. En particulier, il n'est pas question d'évoquer la multiplicité des racines. On se concentre sur l'aspect pratique : factoriser lorsqu'une racine est connue et pouvoir écrire une égalité entre deux polynôme de degré n après avoir montré qu'ils coïncidaient en $n + 1$ valeurs.
- Pour l'ordre 1, les étudiants sont censé savoir résoudre $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$ sur un intervalle pour lequel a ne s'annule pas. Nous n'avons pas encore vu d'exemple de recollement des solutions dans le cas où a s'annule.
- Le théorème permettant de trouver toutes les solution en en connaissant une et toutes les solutions de l'équation homogène est connu des étudiants sous le nom de *théorème de structure*.

En détail

Équations polynomiales complexes

Reprise du programme précédent

Équations différentielles linéaires

Dans toute la suite J désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Le premier ordre

1.1 Cas normalisé et homogène

On s'intéresse donc aux solutions de l'équation (où β est un fonction continue sur J fixé)

$$y' + \beta y = 0. \tag{$E_{n,h,1}$}$$

Lemme 1. *Soit y_1 et y_2 deux solutions de l'équation homogène $(E_{n,h,1})$. Alors, pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $\lambda y_1 + \beta y_2$ est solution de l'équation homogène $(E_{n,h,1})$.*

Théorème 2. *On note B une primitive de la fonction β sur J. Alors l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \exp(-B(x)) \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

Autrement dit, toutes les solutions sont colinéaires à la fonction $x \mapsto \exp(-A(x))$. Si l'on note $y_0 : \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(-B(x)) \end{array}$, alors l'ensemble des solutions se note $\mathrm{Vect}(y_0)$

Remarque 3 (À retenir). Dans les notations précédentes, on a pour toute fonction f définie sur J l'équivalence suivante

la fonction f est solution de $(E_{n,h,1})$ si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in J,\ f(x) = \lambda \exp(-B(x))$.

1.2 Cas normalisé avec second membre

On s'intéresse donc aux solutions de l'équation (où β et γ sont deux fonctions continues sur J fixées).

$$y' + \beta y = \gamma. \tag{$E_{n,1}$}$$

On notera encore $(E_{n,h,1})$ l'équation homogène associée.

1.3 Théorème de structure

Théorème 4. *Soit y_p une solution particulière de l'équation $(E_{n,1})$. On note encore B une primitive de la fonction β sur J. On note également $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène $E_{n,h,1}$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solution de l'équation avec second membre $(E_{n,1})$. Alors l'ensemble des solutions de l'équation est :*

$$\mathcal{S} = \{y_p + y_0 \mid y_0 \in \mathcal{S}_0\} = \left\{ \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y_1(x) + \lambda \exp(-B(x)) \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

Autrement dit, il suffit de résoudre l'équation homogène et de trouver une *solution de $(E_{n,1})$ pour trouver* toutes *les solutions de $(E_{n,1})$*

1.3.1 Variation de la constante

Méthode 5. On note encore B une primitive de β sur J. Pour trouver une solution particulière de l'équation $E_{n,1}$, on la cherche sous la forme $x \mapsto \lambda(x)\exp(-B(x))$. C'est-à-dire que on considère une fonction quelconque λ dérivable et que l'on pose ensuite $y : x \mapsto \lambda(x)\exp(-B(x))$.

On écrit alors une condition nécessaire et suffisante sur la fonction λ pour que y soit solution de $(E_{n,1})$. Une telle condition revient à spécifier la dérivée λ' et on n'a plus ensuite qu'à primitiver.

1.3.2 Principe de superposition

Théorème 6 (Principe de superposition, à l'ordre 1)**.** *Soit α, β, γ_1 et γ_2 quatre fonctions dérivables sur un intervalle J. On note y_1 une solution de $\alpha y' + \beta y = \gamma_1$ et y_2 une solution de $\alpha y' + \beta y = \gamma_2$.*

Alors la fonction $y_1 + y_2$ est solution de $\alpha y' + \beta y = \gamma_1 + \gamma_2$

1.3.3 Problème de Cauchy d'ordre 1

Théorème 7 (Problème de Cauchy pour le premier ordre normalisé)**.** *Soit $x_0 \in J$ et y_0 un réel quelconque. Alors il existe un et une unique fonction y qui soit solution de $(E_{n,1})$ et qui vérifie en plus la condition $y(x_0) = y_0$. Cette fonction est dite* solution du problème de Cauchy *associé à l'équation $(E_{n,1})$ et à la condition initiale $y(x_0) = y_0$.*

2 Le second ordre à coefficients constants

Notation 8. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ trois scalaires avec $a \neq 0$ ainsi que J un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère également δ une fonction continue sur J et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On s'intéresse alors à l'équation différentielle suivante :

$$ay'' + by' + cy = \delta. \tag{E_2}$$

C'est-à-dire qu'une fonction y sera dite solution de (E_2) si elle est deux fois dérivable et vérifie $\forall x \in J,\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = \delta(x)$.

On notera également l'équation homogène associée :

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{$E_{h,2}$}$$

2.1 Cas homogène

Lemme 9. *Soit y_1 et y_2 deux solutions de l'équation homogène $(E_{h,2})$. Alors, pour tout couple $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $\lambda y_1 + \beta y_2$ est solution de l'équation homogène $(E_{h,2})$.*

2.1.1 Résolution complexe

Théorème 10 (Résolution de l'équation homogène de second ordre, version complexe)**.** *On note $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène $(E_{h,2})$.*

On note également $\Delta = b^2 - 4ac$ et on s'intéresse à l'équation caractéristique $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. La résolution de l'équation différentielle $(E_{h,2})$ dépend du nombre de solutions de l'équation caractéristique. Précisément :

- *Si $\Delta \neq 0$, alors l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes que l'on note r_1 et r_2. Dans ce cas, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E_{h,2})$ est donné par :*

$$\mathcal{S}_h = \left\{ \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \lambda\exp(r_1 x) + \mu\exp(r_2 x) \end{array} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

- *Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique admet une unique solution que l'on note r_0. Dans ce cas, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E_{h,2})$ est donné par :*

$$\mathcal{S}_h = \left\{ \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \lambda\exp(r_0 x) + \mu x\exp(r_0 x) \end{array} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

2.1.2 Résolution réelle

Théorème 11 (Résolution de l'équation homogène de second ordre, version réelle)**.** *On note $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène $(E_{h,2})$.*

On note également $\Delta = b^2 - 4ac$ et on s'intéresse à l'équation caractéristique $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{R}$. La résolution de l'équation différentielle $(E_{h,2})$ dépend du nombre de solutions de l'équation caractéristique. Précisément :

— *Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes que l'on note r_1 et r_2. Dans ce cas, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E_{h,2})$ est donné par :*

$$\mathcal{S}_h = \left\{ \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \exp(r_1 x) + \mu \exp(r_2 x) \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

— *Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique admet une unique solution que l'on note r_0. Dans ce cas, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E_{h,2})$ est donné par :*

$$\mathcal{S}_h = \left\{ \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \exp(r_0 x) + \mu x \exp(r_0 x) \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

— *Si $\Delta < 0$, alors l'équation caractéristique n'admet aucune solution réelle. Elle admet en revanche deux solutions complexes conjuguées. On note alors r_+ la solution de partie imaginaire positive ainsi que $s = \mathrm{Re}(r_+)$ et $\omega = \mathrm{Im}(r_+)$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E_{h,2})$ est donné par :*

$$\mathcal{S}_h = \left\{ \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \exp(sx)\cos(\omega x) + \mu \exp(sx)\sin(\omega x) \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2.2 Cas avec second membre

2.2.1 Théorème de structure

2.2.2 Principe de superposition

Théorème 12. *Soit y_1 une solution particulière de l'équation (E_2). On note $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène $E_{h,2}$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solution de l'équation avec second membre (E_2). Alors l'ensemble des solutions de l'équation est :*

$$\mathcal{S} = \{y_1 + y_0 \mid y_0 \in \mathcal{S}_0\}$$

2.2.3 Problème de Cauchy

Théorème 13 (Problème de Cauchy pour le second ordre à coefficients constants)**.** *Soit $x_0 \in J$ ainsi que y_0 et y_0' deux réels quelconques. Alors il existe un et une unique fonction y qui soit solution de (E_2) et qui vérifie en plus la condition $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ \text{et } y'(x_0) = y_0' \end{cases}$. Cette fonction est dite* solution du problème de Cauchy *associé à l'équation (E_2) et à la condition initiale $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ \text{et } y'(x_0) = y_0' \end{cases}$.*

2.2.4 Cas particulier de second membre pour lesquels on sait trouver des solutions

Méthode 14 (Recherche de solution particulière pour le second membre)**.** On suppose qu'il existe un scalaire r et un polynôme P tel que $\forall x \in J, \delta(x) = P(x)\mathrm{e}^{rx}$.

Autrement dit, on cherche à résoudre l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = P(x)\mathrm{e}^{rx}$.

On cherche alors une solution sous la forme $x \mapsto Q(x)\mathrm{e}^{rx}$ où Q est un polynôme dont le degré vérifie :

— Si r n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors $\deg(Q) = \deg(P)$

— Si r est racine simple de l'équation caractéristique (c'est-à-dire qu'il existe une autre racine distincte de r), alors $\deg(Q) = 1 + \deg(P)$
— Si r est racine double de l'équation caractéristique (c'est-à-dire qu'elle est la seule racine de l'équation caractéristique), alors $\deg(Q) = 2 + \deg(P)$

Remarque 15. En traitant le cas $r = 0$, on traite le cas des second membre polynomiaux.

Remarque 16. Si le second membre est de la forme $P(x)\sin(rx)$ pour un certain polynôme P, alors on applique également la méthode en écrivant $\sin(rx) = \frac{\mathrm{e}^{irx} - \mathrm{e}^{-irx}}{2\mathrm{i}}$ puis en appliquant le principe de superposition. Même principe pour le cosinus.