

Colles semaine 12

En bref

- Équations différentielles linéaires :
 - Résolution des équation d'ordre 1 homogène.
 - Recherche de solution particulière pour l'ordre 1 avec second membre grâce à la méthode de variation de la constante.
 - Trouver toutes les solutions connaissant une solution particulière et les solutions de l'équation homogène associée (ordre 1 ou 2).
 - Résolution des équations linéaires d'ordre 2 à **coefficients constants**.
 - Recherche de solution particulière pour $ay'' + by' + cy = P(x)e^{rx}$ où (a, b, c, r) sont des constantes fixées et P un polynôme.
 - Principe de superposition (ordre 1 ou 2). Application remarquable et remarquée pour résoudre $ay'' + by' + cy = P(x)\sin(\omega x)$.
 - Problème de Cauchy pour l'ordre 1 ou 2.
- Analyse asymptotique :
 - Définition de $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} w_n$; $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n)$ et $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(w_n)$ pour des suites réelles ou complexes.
 - Définition de $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$; $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ et $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$ pour des fonctions réelles ou complexes.
 - Règle de calcul (transitivité, produit, somme, passage à l'inverse, élévation à une puissance **fixée**, ...)
 - Règle de composition des équivalent par le logarithme pour les suites ayant une limite nulle ou $+\infty$.
 - Développement limité d'ordre 1. Notamment l'équivalence entre la dérivabilité de f en un point et l'existence d'un développement limité d'ordre 1 au voisinage de ce point.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Énoncer et démontrer le principe de superposition pour l'ordre 1.
- Énoncer et démontrer le théorème de structure pour l'ordre 1.
- Résoudre $y' + ay = e^x$ sur $\mathbb{R}$, pour une constante a fixé, ou un exemple approchant.
- Résoudre $y' + \frac{1}{x^2+x+1}y = 0$ sur $\mathbb{R}$, ou un exemple approchant.
- Résoudre $2y'' + 3y' + 5y = 0$ sur $\mathbb{R}$, ou un exemple approchant. *On pourra au choix demander les solutions à valeurs complexes ou réelles.*
- Montrer l'équivalence logique $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} w_n \iff u_n - w_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n)$ pour des suites pertinentes.
- Montrer l'implication $\left[u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n) \text{ et } x_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(y_n) \right] \implies u_n x_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n y_n)$.
- Montrer le théorème des gendarmes pour les suites équivalentes.
- Écrire explicitement un développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ au voisinage de 0 ou un exemple approchant.
- Citer l'équivalence entre existence d'un développement limité d'ordre 1 et dérivabilité. Montrer l'une des implication de cette équivalence.

Notes aux colleurs

- Il est normal qu'un étudiants puisse hésiter sur une règle de calcul asymptotique. En revanche, il n'est pas normal que ce même étudiant ne puisse pas spontanément lever son hésitation en revenant au formalisme de limite.
- En conséquence du point précédent, on enverra au bûcher tout étudiant qui tenterait des horreurs telles des sommes d'équivalents sans précaution !
- Nous n'avons défini les développements limités qu'à l'ordre 1. Les colleurs auront toute liberté pour faire admettre une développement limités d'ordre supérieur si cela est utile dans l'exercice. Exemple traité en cours : Étudier la dérivabilité en zéro de $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ à l'aide du développement limité d'ordre 2 du cosinus.

En détail

Équations différentielles linéaires

Reprise du programme précédent

Analyse asymptotique

1 Comparaison asymptotique des suites

1.1 Suites négligeables et dominées

1.1.1 Définitions

Définition 1. On dit qu'une suite u est *négligeable asymptotiquement* devant une suite v (non nulle à partir d'un certain rang) si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = 0$. On écrit alors $u_n = o(v_n)$ ou $u = o(v)$. Cette notation se lit : " u est un petit o de v ".

Définition 2. On dit qu'une suite u est *dominée* par une suite v (non nulle à partir d'un certain rang) si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n} \right)$ est bornée. On écrit alors $u_n = o(v_n)$ ou $u = o(v)$. Cette notation se lit : " u est un grand o de v ".

Remarque 3. Dans les notations « $u_n = o(v_n)$ » ou « $u_n = o(v_n)$ », la variable n est muette.

Lemme 4. Pour u et v deux suites, si $u_n = O(v_n)$, alors $u_n = o(v_n)$.

1.1.2 Reformulations

Proposition 5. Soit u une suite et v une suite asymptotiquement non nulle, c'est-à-dire que pour n assez grand $v_n \neq 0$. Alors on peut définir à partir d'un certain rang la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ et alors :

- i) $u_n = O(v_n)$ si et seulement s'il existe une suite ε **convergeant vers 0** telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ à partir d'un certain rang.
- ii) $u_n = o(v_n)$ si et seulement si la suite $n \mapsto \left(\frac{u_n}{v_n} \right)$ converge vers 0.

En conséquence nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 6. Soit u une suite :

- i) $u_n = O(1)$ si et seulement si la suite u est bornée.
- ii) $u_n = o(1)$ si et seulement s'il existe une suite a **bornée** telle que $u_n = a_n v_n$ à partir d'un certain rang.

1.2 Réécriture des résultats de croissance comparées

Proposition 7 (Dominations classiques). Nous traduisons les résultats classiques de croissances comparées à l'aide de cette nouvelle notation. Soit α et β deux réels, alors :

- i) si $\alpha < \beta$, $n^\alpha = o(n^\beta)$,
- ii) si $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et si $\beta > 1$, $n^\alpha = o(\beta^n)$,
- iii) si $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et si $-1 < \beta < 1$, $\beta^n = o(n^\alpha)$,
- iv) si $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et si $\beta > 0$, $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$,
- v) si $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et si $\beta < 0$, $n^\beta = o((\ln n)^\alpha)$,
- vi) si $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\alpha^n = o(n!)$
- vii) $n! = o(n^n)$.

1.3 Suites équivalentes

1.3.1 Définition

Définition 8. Soit u une suite et v une suite asymptotiquement non nulle. On dit que les suites u et v sont asymptotiquement équivalentes si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = 0$. On écrit alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$

Proposition 9 (Reformulation). On dit qu'une suite u est équivalente à une suite v si et seulement s'il existe une suite ε **convergeant vers 0** telle que, pour n assez grand : $u_n = (1 + \varepsilon_n)v_n$.

1.3.2 Propriétés élémentaires

Proposition 10 (Lien entre suites équivalentes et suites négligeables). *Soit u et v deux suites :*

$$u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(u_n) \iff u_n - v_n = o(v_n)$$

Proposition 11. *Si u et v sont deux suites équivalentes, alors elles ont même limite éventuelle. C'est-à-dire, si u admet une limite, alors v admet également une limite qui est la même.*

Proposition 12. *Soit ℓ un réel **non nul** et u une suite. Alors $u_n \sim \ell$ si et seulement si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$.*

Attention ! La proposition précédente est, bien sûr, fausse si $\ell = 0$. (Penser à $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$). En fait, on peut dire que la théorie des équivalent est principalement utile dans le cas des suites convergeant vers zéro ou divergeant vers l'infini.

1.4 Règles de calcul

1.4.1 Mise en garde

Attention ! On ne peut pas additionner sans précaution des équivalents, on ne peut pas non plus composer des équivalent par une fonction quelconque. On peut remarquer, par exemple, que $n + 1 \sim n$ mais $(n + 1) - n \approx 0$. De même $n + 1 \sim n$ mais $e^{n+1} = ee^n \approx e^n$.

1.4.2 Règles licites

Proposition 13 (Somme de suites négligeables). *Pour trois suites, si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n)$ et si $u'_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n)$; alors $u_n + u'_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n)$*

Lemme 14 (Transitivité des relations de comparaisons). *Pour trois suites :*

- i) Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(v_n)$ et si $v_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n)$; alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n)$.
- ii) Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$ et si $v_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} w_n$; alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} w_n$.
- iii) Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(v_n)$ et si $v_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} w_n$; alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n)$.
- iv) Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$ et si $v_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n)$; alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n)$.
- v) Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(v_n)$ et si $v_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(w_n)$; alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n)$.
- vi) Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n)$ et si $v_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n)$; alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n)$.

Proposition 15 (Produit). *Pour quatre suites :*

- i) Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n)$ et si $u'_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w'_n)$; alors $u_n u'_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n w'_n)$.
- ii) Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} w_n$ et si $u'_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} w'_n$; alors $u_n u'_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} w_n w'_n$.
- iii) Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} w_n$ et si $u'_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w'_n)$; alors $u_n u'_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n w'_n)$.
- iv) Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(w_n)$ et si $u'_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w'_n)$; alors $u_n u'_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n w'_n)$.

Proposition 16 (Passage à l'inverse). *Pour deux suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang :*

- i) $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n) \iff \frac{1}{w_n} \underset{n \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{u_n}\right)$.
- ii) $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(w_n) \iff \frac{1}{w_n} \underset{n \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{u_n}\right)$.
- iii) $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} w_n \iff \frac{1}{w_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{u_n}$.

Proposition 17 (élévation à une puissance fixée). *Pour α un réel et deux suites (Si α n'est pas entier, les suites sont supposées strictement positives à partir d'un certain rang).*

- i) Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} w_n$; alors $u_n^\alpha \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} w_n^\alpha$.
- ii) Si α **est positif** et si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n)$; alors $u_n^\alpha \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n^\alpha)$.
- iii) Si α **est positif** et si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(w_n)$; alors $u_n^\alpha \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(w_n^\alpha)$.
- iv) Si $\alpha < 0$ et si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(w_n)$; alors $w_n^\alpha \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(u_n^\alpha)$.

Proposition 18 (composition par le logarithme). *Pour deux suites strictement positives à partir d'un certain rang.*

$$\begin{aligned} \left(u_n \sim w_n \text{ et } u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \right) &\implies \ln(u_n) \sim \ln(w_n), \\ \left(u_n \sim w_n \text{ et } u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0^+ \right) &\implies \ln(u_n) \sim \ln(w_n). \end{aligned}$$

1.4.3 Théorème des gendarmes

Théorème 19 (théorème des gendarmes pour les équivalents). Soit u , w et x trois suites strictement positives à partir d'un certain rang. On suppose que :

- i) $u_n \leq w_n \leq x_n$ à partir d'un certain rang,
- ii) et $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} x_n$.

Alors $x_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} w_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} u_n$.

1.5 Brève généralisation aux suites complexes

Proposition 20. Soit u et v deux suites complexes et on suppose que $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. Alors :

- On a $u_n \sim v_n$ si et seulement si la suite réelle $\left(\left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
- On a $u_n = O(v_n)$ si et seulement si la suite réelle $\left(\left| \frac{u_n}{v_n} \right| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- On a $u_n = o(v_n)$ si et seulement si la suite réelle $\left(\left| \frac{u_n}{v_n} \right| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

2 Cas des fonctions

2.1 Définitions

Définition 21. Soit f et g deux fonctions :

- i) On dit que f est dominée par g au voisinage de a si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a . On note alors
- ii) On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si $\frac{f}{g}$ admet une limite nulle en a . On note alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ ou $f = o(g)$ et on dit que " f est un petit o de g au voisinage de a ".
- iii) On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si $\frac{f}{g}$ admet pour limite 1 en a . On note alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$ et on dit que " f est équivalente à g au voisinage de a ".

2.2 Règles logiques et de calcul

Toutes les règles sur les suites se généralisent pour les fonctions

2.3 Croissances comparées

Exemple 22. Donnons une série d'exemples classiques

- i) si $\alpha < \beta$, $x^\beta \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^\alpha)$,
- ii) si P est un polynôme s'écrivant $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=p}^n a_k x^k$ pour une certaine famille de réels $(a_p, \dots, a_n)$ vérifiant $a_p \neq 0$ et $a_n \neq 0$; alors $P(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_p x^p$ et $P(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} a_n x^n$.
- iii) si $\alpha \in \mathbb{R}$ et si $\beta > 0$, $|\ln x|^\alpha \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$,
- iv) si $\alpha \in \mathbb{R}$ et si $\beta > 0$, $x^\beta \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o(|\ln x|^\alpha)$,

3 Développement limités d'ordre 1

3.1 Cas général

Théorème 23. Soit f une fonction définie sur un voisinage d'un réel a .

- Si f est dérivable en a , alors on a un développement limité $f(a+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(a) + xf'(a) + o(x)$.
- Réciproquement, si f admet un développement limité d'ordre 1 en a , c'est-à-dire s'il existe une constante α telle que $f(a+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(a) + \alpha x + o(x)$; alors la fonction f est dérivable en a et $f'(a) = \alpha$.

3.2 Applications à connaître par cœur

Proposition 24. En appliquant la proposition 23 pour les fonctions usuelles, on trouve :

- i) $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$.
- ii) $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$; autrement dit $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.
- iii) $(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + o(x)$; α étant une constante fixée.
- iv) $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + o(x)$
- v) $\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + o(x)$
- vi) $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + o(x)$
- vii) $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x$; autrement dit $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x + o(x)$.
- viii) $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$; autrement dit $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.
- ix) $\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$; autrement dit $\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.
- x) $\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$; autrement dit $\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

3.3 Séquentialisation de développement limité

Théorème 25 (Combinaison de limites et de relation de comparaison). Soit f et g deux fonctions définies sur le voisinage d'un point a . Soit également une suite u .

- Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ et si $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = a$; alors $f(u_n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(g(u_n))$.
- Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$ et si $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = a$; alors $f(u_n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(g(u_n))$.
- Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et si $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = a$; alors $f(u_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} g(u_n)$.

Corollaire 26 (Séquentialisation des développements limités). Soit f une fonction dérivable en a et ε une suite convergente vers 0. Alors :

$$f(a + \varepsilon_n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} f(a) + \varepsilon_n f'(a) + o(\varepsilon_n). \quad (1)$$

Exemple 27. Applications typiques :

- i) $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
- ii) $\ln(n+1) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \ln(n) + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$
- iii) $\sqrt{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$