Colles semaine 13

En bref

- Analyse asymptotique :
  - Définition de $u_n \underset{nto\infty}{\sim} w_n$; $u_n \underset{nto\infty}{=} o(w_n)$ et $u_n \underset{nto\infty}{=} O(w_n)$ pour des suites réelles ou complexes.
  - Définition de $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$; $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ pour des fonctions réelles ou complexes.
  - Règle de calcul (transitivité,produit, somme, passage à l'inverse, élévation à une puissance **fixée**, ...)
  - Règle de composition des équivalent par le logarithme pour les suites ayant une limite nulle ou $+\infty$.
  - Développement limité d'ordre 1. Notamment l'équivalence entre la dérivabilité de f en un point et l'existence d'un développement limité d'ordre 1 au voisinage de ce point.
- Valeurs absolues : régularité, graphe, résolution d'(in)équations avec valeurs absolues. Inégalité triangulaire
- Partie entière : caractérisations, régularité, graphe, résolution d'équations avec partie entières.
- Sous-ensemble de $\mathbb{R}$ majorés, minorés, bornés. Majorant, maximum, etc.
- Bornes supérieures : existence via le théorème de la borne supérieure. Unicité via un raisonnement élémentaire. Coïncidence avec le max si le max existe. Caractérisation en epsilon. Détermination pratique via cette caractérisation.
- Adaptation aux bornes inférieures
- Application pour montrer que les intervalles sont exactement les convexes de $\mathbb{R}$.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Montrer l'équivalence logique $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} w_n \iff u_n - w_n \underset{n\to\infty}{=} o(w_n)$ pour des suites pertinentes.
- Montrer l'implication $\left[u_n \underset{n\to\infty}{=} o(w_n) \text{ et } x_n \underset{n\to\infty}{=} O(y_n)\right] \implies u_n x_n \underset{n\to\infty}{=} o(w_n y_n)$.
- Montrer le théorème des gendarmes pour les suites équivalentes.
- Écrire explicitement un développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ au voisinage de 0 ou un exemple approchant.
- Citer l'équivalence entre existence d'un développement limité d'ordre 1 et dérivabilité. Montrer l'une des implications de cette équivalence.
- Citer la définition de $\lfloor x \rfloor$; montrer qu'il s'agit de l'unique entier k vérifiant $x-1 < k \leqslant x$.
- Montrer qu'un ensemble est borné si et seulement si il est majoré et minoré.
- Montrer formellement que $\sup(]0\,;\,1[) = 1$.
- Citer la définition et le théorème de la borne supérieure.
- Montrer que $\sup(A) = \max(A)$ si $\max(A)$ existe.

Notes aux colleurs

- Nous n'avons défini les développements limités qu'à l'ordre 1. Les colleurs auront toute liberté pour faire admettre une développement limités d'ordre supérieur si cela est utile dans l'exercice. Exemple traité en cours : Étudier la dérivabilité en zéro de $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ à l'aide du développement limité d'ordre 2 du cosinus.
- Le programme de PTSI convient que $\sup(A) = +\infty$ si l'ensemble A n'est pas majoré.
- La notion de borne supérieure est une occasion pour familiariser doucement les étudiants avec les méthodes dites « à la epsilonage ». On réservera cela aux étudiants qui ont fait leurs preuves

sur la première moitié de la colle.

En détail

Analyse asymptotique

Reprise du programme précédent

Structure des réels

1 Valeurs absolues

1.1 Définition et rappels

Définition 1. Pour un réel x, on définit la valeur absolue de x et on note $|x|$ le réel défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Proposition 2. *La fonction valeur absolue :* $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$ *est positive et continue sur* $\mathbb{R}$ *; dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *mais non dérivable en zéro ; strictement décroissante sur* $\mathbb{R}_-$ *et strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+$*.*

Lemme 3. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \sqrt{x^2}$

1.2 Variations autour de l'inégalité triangulaire

Lemme 4 (Inégalité triangulaire, version réelle)**.** *Pour tout couple* (x, y) *de réels, on a* $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ *avec égalité si et seulement si* x *et* y *sont de même signe.*

Proposition 5 (Inégalité triangulaire sur les sommes)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$*. Alors*

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k|.$$

Remarque 6. Ceci se montre par récurrence sur n en utilisant la première inégalité triangulaire pour l'hérédité. D'ailleurs, cela reste valable si $(a_0, \dots, a_n)$ est une famille de complexes.

Proposition 7 (Inégalité triangulaire sur les intégrales)**.** *Soit* $[a\,;\,b]$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* f *une fonction continue sur* $[a\,;\,b]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$.*. Alors :*

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

2 Ensembles majorés, minorés, bornés

Définition 8 (Majorant, minorant)**.** Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x un réel.
- On dit que x est un majorant de A si $\forall a \in A,\ a \leqslant x$.
- On dit que x est un minorant de A si $\forall a \in A,\ x \leqslant a$.

Définition 9 (Ensembles majorés , minorés, bornés)**.** Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est dit majoré s'il admet au moins un (et alors une infinité de) majorant ; il est dit minoré s'il admet au moins un (et alors une infinité de) minorant ; il est dit borné s'il est à la fois majoré et minoré.

Définition 10 (Maximum, minimum)**.** Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et m un réel.
- On dit que m est un maximum de A si m est un majorant de A et que $m \in A$.
- On dit que m est un minimum de A si m est un minorant de A et que $m \in A$.

Lemme 11. *Tout minimum d'un ensemble est un minorant de cet ensemble mais la réciproque est fausse en général*

Théorème 12. *Un minimum (ou un maximum) s'il existe est unique. On peut donc parler* du *minimum d'un ensemble A (en cas d'existence) que l'on note* $\min(A)$.

Théorème 13. *Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum.*

Théorème 14. *Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{Z}$ admet :*
- *un minimum s'il est minoré,*
- *un maximum s'il est majoré.*

Théorème 15. *Tout sous-ensemble* ***fini*** *et non vide de $\mathbb{R}$ admet un minimum et un maximum.*

2.1 Une application, la partie entière

Proposition-Définition 16 (Partie entière)**.** *Soit x un réel, l'ensemble $\{k \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$ est bien évidemment majoré par x, il admet donc un maximum que l'on appelle partie entière de x et que l'on note $\lfloor x \rfloor$.*

Proposition 17. *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes*

$$k = \lfloor x \rfloor \iff \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ \text{et } x-1 < k \leqslant x \end{cases} \iff \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ \text{et } k \leqslant x \leqslant k+1 \end{cases}.$$

Proposition 18 (Décomposition en partie entière et fractionnaire)**.** *Soit x un réel. Alors, il existe un unique couple $(k, \varepsilon) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ vérifiant :* $\begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ \text{et } \varepsilon \in [0\,;1[\\ \text{et } x = k+\varepsilon \end{cases}$ *. L'entier k de ce couple est alors la partie entière. Le réel ε, s'appelle parfois* partie fractionnaire *de x.*

Proposition 19. *La fonction* $E : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$ *est :*

i) croissante,

ii) continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

iii) discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$ (mais continue à droite en ces points).

3 Bornes supérieures et inférieures

3.1 Définitions et exemples

Définition 20 (Bornes supérieures et inférieures)**.** Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et m un réel. S'il existe, on appelle borne supérieure de A le plus petit majorant de A ; c'est-à-dire le minimum de l'ensemble des majorants de A. On appelle de même borne inférieure de A, le plus grand minorant de A, s'il existe.

Remarque 21. Dans le cas où l'ensemble A n'est pas majoré, le programme recommande la notation $\sup(A) = +\infty$. De même, si A n'est pas minoré, alors on notera $\inf(A) = -\infty$.

Lemme 22. *Un ensemble non majoré n'admet pas de borne supérieure. De plus, la borne supérieure de A si elle existe est unique et se note* $\sup(A)$.

Proposition 23. *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Si A admet un maximum, alors il admet aussi une borne supérieure et* $\max(A) = \sup(A)$.

Lemme 24 (Réciproque partielle de la proposition précédente)**.** *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui admet une borne supérieure. Alors, deux cas peuvent se présenter :*

i) Soit $\sup(A)$ *appartient à l'ensemble* A*, et dans ce cas,* $\sup(A)$ *est également le maximum de* A.

ii) Soit $\sup(A)$ *n'appartient pas à l'ensemble* A*, et dans ce cas,* A *n'admet pas de maximum.*

Théorème 25 (Théorème de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$)**.** *Tout sous-ensemble* non-vide et majoré *de* $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure. Tout sous-ensemble* non-vide et minoré *de* $\mathbb{R}$ *admet une borne inférieure.*

Remarque 26. Ce théorème peut en fait être considéré comme un axiome dans la construction de l'ensemble $\mathbb{R}$.

3.2 Recherche pratique

Proposition 27 (Caractérisation de la borne supérieure)**.** *Soit* A *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *et* s *un réel. Il est équivalent de dire que* s *est la borne supérieure de* A *et :*

i) s *est un majorant de* A*,*

ii) et $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ s - \varepsilon < a$.

3.3 Une application importante

Définition 28. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que A est *convexe* si et seulement si il vérifie la propriété suivante :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \Big(a \leqslant b \text{ et } a \in A \text{ et } b \in A\Big) \implies [a\,;b] \subset A.$$

Théorème 29. *Soit* A *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$*. Alors* A *est convexe si et seulement si c'est un intervalle.*