Colles semaine 14

En bref

- Valeurs absolues : régularité, graphe, résolution d'(in)équations avec valeurs absolues. Inégalité triangulaire
- Partie entière : caractérisations, régularité, graphe, résolution d'équations avec partie entières.
- Sous-ensemble de $\mathbb{R}$ majorés, minorés, bornés. Majorant, maximum, etc.
- Bornes supérieures : existence via le théorème de la borne supérieure. Unicité via un raisonnement élémentaire. Coïncidence avec le max si le max existe. Caractérisation en epsilon. Détermination pratique via cette caractérisation.
- Adaptation aux bornes inférieures.
- Application pour montrer que les intervalles sont exactement les convexes de $\mathbb{R}$.
- Généralités sur les suites : suites croissantes, décroissantes, majorées, minorées bornées, etc.
- Suites arithmético-géométrique : méthode de résolution.
- Suites récurrentes linéaires homogène d'ordre 2 : Expression de l'ensemble des solutions (version réelle ou complexe)

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Citer la définition de $\lfloor x \rfloor$; montrer qu'il s'agit de l'unique entier k vérifiant $x-1 < k \leqslant x$.
- Montrer qu'un ensemble est borné si et seulement si il est majoré et minoré.
- Montrer formellement que $\sup(]0\,;\,1[) = 1$.
- Citer la définition et le théorème de la borne supérieure.
- Montrer que $\sup(A) = \max(A)$ si $\max(A)$ existe.
- Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si elle vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$.
- Donner une expression de u_n en fonction de n lorsque u est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$ ou tout autre exemple du même genre.
- Donner une expression de u_n en fonction de n lorsque u est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -2\ ,\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+2} - 2u_n \end{cases}$ ou tout autre exemple du même genre.

Notes aux colleurs

- Le programme de PTSI convient que $\sup(A) = +\infty$ si l'ensemble A n'est pas majoré.
- La notion de borne supérieure est une occasion pour familiariser doucement les étudiants avec les méthodes dites « à la epsilonage ». On réservera cela aux étudiants qui ont fait leurs preuves sur la première moitié de la colle.
- Nous n'avons vu encore aucun exercice impliquant des suites récurrentes d'ordre 2 avec second membre non nul. Si l'on pose un tel exercice en colle, on guidera précisément l'étudiant.

En détail

Valeurs absolues, parties entières et bornes supérieures

Reprise du programme précédent

Suites réelles ou complexes

1 Généralités

2 Suites récurrentes linéaires

2.1 Ordre 1

On se donne deux réels a et b fixés et on s'intéresse à une suite u vérifiant l'équation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b \tag{E_1}$$

- Si $a = 1$, il s'agit d'une suite arithmétique.
- Si $b = 0$, il s'agit d'une suite géométrique.
- Si $a \neq 1$ et $b \neq 0$, on dit que c'est une suite arithmético-géométrique et on utilise le théorème suivant.

Théorème 1. *Soit u une suite vérifiant (E_1) avec $a \neq 1$. Alors il existe une unique valeur de α telle que la suite $w := (u - \alpha)$ soit une suite géométrique de raison a. De plus α est l'unique point fixe de la relation de récurrence (E_1). C'est-à-dire que $\alpha = a\alpha + b$.*

2.2 Ordre 2 (cas homogène)

On se donne trois scalaires (complexes ou réels) a, b et c fixés avec $a \neq 0$ et on s'intéresse à une suite u vérifiant l'équation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \tag{E_2}$$

On notera $\mathcal{E}_{a,b,c}$ l'ensemble des suites vérifiant cette relation.

Lemme 2 (Stabilité par combinaison linéaire)**.** *L'ensemble $\mathcal{E}_{a,b,c}$ est stable par combinaison linéaire. C'est-à-dire que pour toutes suites $u \in \mathcal{E}_{a,b,c}$ et $v \in \mathcal{E}_{a,b,c}$, on a :*

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2,\ (\alpha u + \beta v) \in \mathcal{E}_{a,b,c}.$$

Lemme 3 (La suite u est déterminée par ses deux premiers termes)**.** *Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Il existe une et une unique suite u vérifiant les trois conditions suivantes :* $\begin{cases} u \in \mathcal{E}_{a,b,c} \\ u_0 = \alpha \\ u_1 = \beta \end{cases}$.

Pour poursuivre, il est nécessaire de traiter différemment les cas selon que l'on s'intéresse aux suites complexes ou réelles.

Théorème 4 (Résolution de E_2, version complexe)**.** *On appelle équation caractéristique de E_2, l'équation $ar^2 + br + c = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$. On suppose également que b et c ne sont pas simultanément nul (c'est un cas particulier légèrement problématique.)*

— *Si l'équation caractéristique admet deux solutions dans $\mathbb{C}$ distinctes, notées r_1 et r_2 (ce qui correspond donc au cas où $\Delta \neq 0$), alors,*

$$\mathcal{E}_{a,b,c} = \left\{ (\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \, ; \;\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

— *Si l'équation caractéristique admet une solution et une seule dans $\mathbb{C}$, notée r_0 (ce qui revient à $\Delta = 0$), alors,*

$$\mathcal{E}_{a,b,c} = \left\{ (\lambda_1 r_0^n + \lambda_2 n r_0^n)_{n\in\mathbb{N}} \, ; \;\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Théorème 5 (Résolution de E_2, version réelle)**.** *On suppose que a, b et c sont* ***réels*** *avec $a \neq 0$ et on s'intéresse aux suites réelles de $\mathcal{E}_{a,b,c}$. On appelle équation caractéristique de E_2, l'équation $ar^2 + br + c = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{R}$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$. On suppose également que b et c ne sont pas simultanément nul (c'est un cas particulier légèrement problématique.)*

— *Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes, notées r_1 et r_2 (ce qui correspond donc au cas où $\Delta > 0$), alors,*

$$\mathcal{E}_{a,b,c} = \left\{ (\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \, ; \;\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

— *Si l'équation caractéristique admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$, notée r_0 (ce qui revient à $\Delta = 0$), alors,*

$$\mathcal{E}_{a,b,c} = \left\{ (\lambda_1 r_0^n + \lambda_2 n r_0^n)_{n\in\mathbb{N}} \, ; \;\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

— *Si l'équation caractéristique n'a pas de solution réelle (c'est-à-dire $\Delta < 0$), alors, en notant $r = \rho e^{i\theta}$ une des deux solutions complexes conjuguées de l'équation caractéristique (avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$) on a :*

$$\mathcal{E}_{a,b,c} = \left\{ \left(\rho^n (\lambda_1 \cos(n\theta) + \lambda_2 \sin(n\theta))\right)_{n\in\mathbb{N}} \, ; \;\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$