

Colles semaine 15

En bref

- Généralités sur les suites : suites croissantes, décroissantes, majorées, minorées bornées, etc.
- Suites arithmético-géométrique : méthode de résolution.
- Suites récurrentes linéaires homogène d'ordre 2 : Expression de l'ensemble des solutions (version réelle ou complexe)
- Définitions formelles de limites : suites réelles convergentes ou de limite infinie. Généralisation aux suites complexes convergentes
- Règle de calcul de limites : sommes, produit et quotient.
- Théorème prouvant la convergence : théorème de limite monotone, théorème des gendarmes et théorème des suites adjacentes.
- Suites extraites : définition et limites si la suite initiale converge. Utilité pour prouver l'absence de limite.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si elle vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$.
- Donner une expression de u_n en fonction de n lorsque u est la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases} \quad \text{ou tout autre exemple du même genre.}$$
- Donner une expression de u_n en fonction de n lorsque u est la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = -2, u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+2} - 2u_n \end{cases} \quad \text{ou tout autre exemple du même genre.}$$
- Citer la définition de $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$ (ℓ pouvant être un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$; au choix du colleur)
- Montrer que la limite d'une suite est unique en cas d'existence (preuve restreinte aux limites finie)
- Montrer que les suites convergentes sont bornées.
- Montrer que le théorème de passage à la limite des inégalités.
- Montrer que si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$ et si $\ell > a$; alors $u_n > a$ à partir d'un certain rang.
- Citer puis démontrer les liens logiques entre $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1}$.
- Citer et montrer le théorème des gendarmes.

Notes aux colleurs

- La notion de *valeur d'adhérence* est hors-programme.

En détail

1 Suites récurrentes linéaires

Reprise du programme précédent

2 Limites des suites

2.1 Suites convergentes

2.1.1 Définition formelle de limite

Définition 1 (Convergence d'une suite vers un réel). On dit qu'une suite réelle u converge vers un réel ℓ ou encore qu'elle admet ℓ pour limite si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon. \quad (\mathcal{P}_{\text{lim}})$$

On note alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$ ou encore $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$.

Attention ! La question de l'existence d'une limite pour une suite donnée est, en générale délicate. On n'emploiera donc jamais la notation $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ avant d'avoir prouvé ou supposé que cette limite existe.

Remarque 2. On abrège parfois la propriété $(\mathcal{P}_{\text{lim}})$ de la manière suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

2.1.2 Quelques conséquences théoriques

Proposition 3. Si une suite réelle converge vers un réel, alors elle est bornée.

Proposition 4. Si une suite converge vers une limite, alors cette limite est unique.

Proposition 5. Si une suite u converge vers un réel $\ell > 0$, alors à partir d'un certain rang $u_n \geq 0$.

Remarque 6. Il est crucial dans la proposition précédente que ℓ soit **strictement supérieur** à zéro. Cherchez un contre-exemple lorsque $\ell = 0$.

Proposition 7 (Passage à la limite des inégalités). Soit a un réel et u une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < a$. Alors, si la suite u converge vers ℓ , on a l'inégalité **large** suivante : $\ell \leq a$.

Proposition 8 (Caractérisation de la convergence par les sous-suites de rang pair et impair). Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si les deux suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Un étudiant de PTSI doit savoir démontrer les propriétés 3 à 8.

2.2 Limites infinies pour les suites réelles

2.2.1 Définitions

Définition 9 (Limites infinies). On dit qu'une suite réelle u admet pour limite $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Rightarrow u_n \geq A.$$

On dit qu'une suite u admet pour limite $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Rightarrow u_n \leq A.$$

2.2.2 Propriétés élémentaires

Nous reprenons les propriétés 3 à 8 et nous les généralisons au cas des limites éventuellement infinies.

Proposition 10. *Si une suite réelle admet une limite (finie ou infinie), alors cette limite est unique.*

Proposition 11. *Soit u une suite admettant $+\infty$ pour limite. Alors u est minorée et n'est pas majorée.*

De même si u admet $-\infty$ pour limite, alors elle est majorée mais pas minorée.

Proposition 12. *Si une suite u tend vers $+\infty$, alors à partir d'un certain rang $u_n \geq 0$.*

Proposition 13 (Passage à la limite des inégalités). *Soit a un réel et u une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < a$. On suppose également que la suite u admette une limite ℓ (finie ou infinie); alors, ou bien $\ell = -\infty$ ou bien ℓ est un réel fini vérifiant : $\ell \leq a$.*

Proposition 14 (Caractérisation de la limite par les sous-suites de rang pair et impair). *Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite (finie ou infinie) si et seulement si les deux suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ admettent une limite commune.*

2.3 Règles de calculs de limites

Proposition 15 (Sommes de limites). *Soit u et v deux suites admettant pour limites respectives ℓ_1 et ℓ_2 finies ou infinies. Le tableau suivant résume ce que l'on peut dire de la limite de la suite $u + v$.*

	$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 \in \mathbb{R}$	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	<i>F.I.</i>
$-\infty$	$-\infty$	<i>F.I.</i>	$-\infty$

Proposition 16 (Produit de limites). *Soit u et v deux suites admettant pour limites respectives ℓ_1 et ℓ_2 finies ou infinies. Le tableau suivant résume ce que l'on peut dire de la limite de la suite uv .*

	$\ell_1 \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell_1 \in \mathbb{R}_-^*$	$\ell_1 = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell_1 \ell_2$	$\ell_1 \ell_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 \in \mathbb{R}_-^*$	$\ell_1 \ell_2$	$\ell_1 \ell_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = 0$	0	0	0	<i>F.I.</i>	<i>F.I.</i>
$\ell_2 = +\infty$	$+\infty$	$-\infty$	<i>F.I.</i>	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 = -\infty$	$-\infty$	$+\infty$	<i>F.I.</i>	$-\infty$	$+\infty$

Proposition 17 (Quotient de limites). *Soit u et v deux suites admettant pour limites respectives ℓ_1 et ℓ_2 finies ou infinies. Le tableau suivant résume ce que l'on peut dire de la limite de la suite $\frac{u}{v}$. On supposera bien sûr que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.*

	$\ell_1 \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell_1 \in \mathbb{R}_-^*$	$\ell_1 = 0^+$	$\ell_1 = 0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 \in \mathbb{R}_+^*$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 \in \mathbb{R}_-^*$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	0^-	0^+	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = 0^+$	$+\infty$	$-\infty$	<i>F.I.</i>	<i>F.I.</i>	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 = 0^-$	$-\infty$	$+\infty$	<i>F.I.</i>	<i>F.I.</i>	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = +\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	<i>F.I.</i>	<i>F.I.</i>
$\ell_2 = -\infty$	0^-	0^+	0^-	0^+	<i>F.I.</i>	<i>F.I.</i>

Attention ! La notation 0^+ veut dire que la suite converge vers zéro tout en restant positive à partir d'un certain rang. En règle générale si le dénominateur tend vers 0 sans que l'on puisse déterminer son signe et que le numérateur a une limite non-nulle, alors on a affaire à une forme indéterminée. Le quotient peut n'avoir aucune limite dans ce cas ! Exemple de $\frac{1}{(-1)^n e^{-n}}$.

2.4 Prouver la convergence d'une suite

Théorème 18 (Théorème de limite monotone). *Soit u une suite croissante de réels. Alors la suite u admet une limite. De plus :*

- *Soit la suite u est majorée et alors elle converge vers une limite finie.*
- *Soit la suite u n'est pas majorée et alors sa limite vaut $+\infty$.*

Exercice 19. Adapter ce théorème au cas des suites décroissantes.

Théorème 20 (Suites adjacentes). *Soit u et v deux suites réelles. On dit que u et v sont adjacentes si :*

- *L'une des deux suites est croissante.*
- *L'autre suite est décroissante.*
- *La suite $u - v$ converge vers 0.*

Dans ce cas, u et v sont convergentes et convergent vers la même limite ℓ . De plus,

- *Si la suite u est croissante, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_n$.*
- *Si la suite u est décroissante, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq \ell \leq u_n$.*

Application 21. Soit x un réel. Montrer que les suites définies par $u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{10^n}$ sont adjacentes.

Théorème 22 (Théorème des gendarmes). *Soit u, v et w trois suites réelles. On suppose que*

- *à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$,*
- *et u et w converge toutes deux vers la même limite ℓ .*

Alors la suite v est convergente et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \ell$.

Théorème 23 (Divergence par majoration ou minoration). *Soit u et v deux suite réelles vérifiant $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Alors :*

- *si la suite u diverge vers $+\infty$, il en est de même pour la suite v .*
- *si la suite v diverge vers $-\infty$, il en est de même pour la suite u .*

2.5 Brève extension aux suites complexes

Définition 24. Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que la suite z converge si la suite réelle $(|z_n - \ell|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Remarque 25. Il n'existe pas de notion de limite infinie pour les suites complexes.

Définition 26. Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. On dit qu'elle est bornée si la suite réelle $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Lemme 27. *Si une suite (z_n) converge vers un complexe ℓ , alors $|z_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |\ell|$. La réciproque est fausse en général.*

Exemple 28 (Suites géométriques complexes). Pour tout complexe q fixé, la suite complexe de terme général $u_n = q^n$:

- converge vers 0 si $|q| < 1$;
- converge vers 1 si $q = 1$;

- n'a pas de limite et reste bornée si $|q| = 1$ et $q \neq 1$; (Ce point est plus délicat à prouver que le reste).
- n'a pas de limite et diverge en module (c'est-à-dire $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$) si $|q| > 1$.

Proposition 29 (Caractérisation de la convergence par les parties réelles et imaginaires). *Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. Cette suite converge si et seulement si chacune des suites réelles $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) + i \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n)$.*

2.6 Suites extraites

Définition 30. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite (réelle ou complexe). On appelle *suite extraite* de u , ou encore *sous-suite* de u toute suite de type $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où φ représente une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Exemple 31. Pour une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$; $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$; $(u_{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ ou encore $(u_{3n^3+2n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites extraites.

Théorème 32 (Une suite extraie d'une suite convergente converge vers la même limite). *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite (réelle ou complexe). Si cette suite admet une limite ℓ (éventuellement infinie si la suite est réelle), alors toute sous-suite de u admet la même limite ℓ .*

Application 33. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$; alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \ell$ ou encore $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = \ell$.

Exercice 34. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$. Montrer que cette suite diverge en s'intéressant aux sous-suites $(u_{6n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{6n+1})_{n \in \mathbb{N}}$