

Colles semaine 16

En bref

- Tout sur les suites.
- Attention particulière à l'étude des suites satisfaisant une relation de récurrence de type $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
- Arithmétique élémentaire : notion de multiple, diviseur, pgcd, nombre premiers entre eux.
- Définition formelle des limites de fonctions.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Pour cette semaine, nous ferons une colle en deux (ou trois) temps

- En guise de question de cours, l'étudiant énoncera une des définition de limites de fonction au choix du colleur. (Il y a neuf cas à étudier, voire plus si on s'amuse avec les limites à gauche, à droite, etc)
- Ensuite, on poursuivra avec l'étude d'une suite de type $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Si jamais il reste cinq minutes à meubler en fin de colle, on pourra poser une question d'arithmétique. Mais l'importance de ce chapitre reste négligeable devant les points précédents.

Notes aux colleurs

- La notion de *valeur d'adhérence* est hors-programme.
- Pour l'étude des suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$ aucun théorème général n'est au programme. Tout doit être redémontré par l'étudiant. Normalement, il ont connaissance d'un plan de bataille (commençant par une conjecture préalable basée sur une représentation graphique). Néanmoins, on n'hésitera pas à les guider autant que nécessaire.

En détail

1 Limites des suites

Reprise du programme précédent

2 Éléments d'études des suites récurrentes

Dans toute cette section, nous nous fixerons une fonction définie sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{R}$ et nous étudierons les suites u qui vérifient la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \quad (\text{Rec}_f)$$

Attention ! L'étudiant tournera sept fois sa craie dans sa main avant d'écrire des âneries lorsqu'il est confronté à un tel problème. En particulier, il veillera à ne pas confondre les propriétés de la fonction f et celles de la suite u .

2.1 La question de la bonne définition de la suite

Définition 1 (Ensembles stables par une fonction). Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeur dans $\mathbb{R}$. On dit qu'un sous-ensemble A de I est stable par f s'il vérifie $\forall x \in A, f(x) \in A$.

Remarque 2. On peut traduire cette définition à l'aide de la notion d'image directe. En reprenant les notations de la définition précédente, un ensemble A est stable par f si et seulement si $f(A) \subset A$.

Méthode 3. Si A est un ensemble stable par f et si $u_0 \in A$, alors on peut prouver par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_n \text{ est bien défini} \\ \text{et } u_n \in A \end{cases}$.

2.2 Étude de monotonie

2.2.1 En utilisant le signe de $f(x) - x$.

Méthode 4. Si l'on dispose d'un intervalle J inclus dans I tel que $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in J \\ \forall x \in J, f(x) \leq x \end{cases}$ alors on peut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$ et donc que la suite u est décroissante.

On adaptera évidemment si $\forall x \in J, f(x) \geq x$. En revanche, si le signe de $f(x) - x$ n'est pas constant sur J , cette méthode ne donne rien.

2.2.2 Cas avec une fonction croissante

Méthode 5. Si l'on dispose d'un intervalle J inclus dans I tel que $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in J \\ \text{la fonction } f \text{ est croissante sur } J \end{cases}$ alors on peut montrer que la suite u est monotone.

Plus concrètement, on compare u_1 et u_0 , puis :

- Si $u_1 \leq u_0$, on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$.
- Si $u_1 \geq u_0$, on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$.

2.2.3 Cas avec une fonction décroissante

Méthode 6. Si l'on dispose d'un intervalle J inclus dans I tel que $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in J \\ \text{la fonction } f \text{ est décroissante sur } J \end{cases}$ alors on étudie séparément les sous-suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. Notamment on montre que la première est monotone par récurrence. Puis, en écrivant $u_{2n+1} = f(u_{2n})$ on montre directement que la suivante est monotone de monotonie contraire à la première.

2.3 Étude de limite

Théorème 7 (Admis provisoirement). *Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I et que u est une suite d'éléments de I convergente vers un réel $\ell \in I$, si de plus la fonction f est **continue** en ℓ , alors la suite $n \mapsto f(u_n)$ est également convergente et sa limite vaut $f(\ell)$.*

Méthode 8 (La limite éventuelle de u est un point fixe). Si la suite u converge vers un réel ℓ appartenant à I et que f est continue sur I , alors en étudiant de deux manières la limite de la suite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ on montre que ℓ est un point fixe de f . C'est-à-dire $f(\ell) = \ell$.

Attention ! Ceci nécessite d'avoir prouvé d'abord la convergence de la suite pour s'appliquer.

3 Arithmétique élémentaire

3.1 Multiples et diviseurs

Le lecteur connaît normalement parfaitement les notions de multiples et diviseurs et cette partie ne devrait apporter aucune surprise.

Définition 9. Soit a et b deux entiers relatifs. On dit que a *divise* b ou que a *est un diviseur* de b ou encore que b *est un multiple* de a si $\exists c \in \mathbb{Z}, b = ac$.

On trouve parfois dans la littérature, la notation $a \mid b$ pour signifier que a divise b .

Proposition 10 (Propositions élémentaires sur la divisibilité). *Le lecteur s'assurera qu'il sait démontrer sans hésiter toutes les assertions suivantes.*

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$

- i) 0 est multiple de tous les entiers.
- ii) 0 n'est le diviseur d'aucun entier autre que lui-même.
- iii) 1 et -1 divisent tous les entiers. Ce sont les seuls entiers dans ce cas.
- iv) a divise a .
- v) Si a divise b et si b divise a , alors $a = \pm b$.
- vi) Si a divise b et si b divise c , alors a divise c .
- vii) Si a divise b et a divise c , alors a divise $\lambda b + \mu c$ pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2$.
- viii) Si a divise b et si $b \neq 0$, alors $|a| \leq |b|$.

3.2 Nombre premiers

Définition 11 (Nombre premier). Un entier naturel p est dit *premier* s'il admet exactement deux diviseurs positifs.

Remarque 12. Si p est un nombre premier, alors ses deux diviseurs positifs sont donc 1 et p . Par ailleurs, il admet aussi exactement deux diviseurs négatifs qui sont -1 et $-p$.

On notera que 1 n'est pas un nombre premier au vu de cette définition.

Théorème 13. *Tout entier naturel au moins égal à 2 admet une décomposition en produit de facteurs premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.*

3.3 Nombres premiers entre eux

Définition 14 (Nombre premier entre eux). Soit a et b deux entiers relatifs. Ces entiers sont dits *premiers entre eux* si leurs seuls diviseurs communs sont 1 et -1 .

Lemme 15. *Si p est un nombre premier et n un entier quelconque, alors p et n sont premiers entre eux si et seulement si p ne divise pas n .*

Lemme 16. *Si a et b sont deux entiers premiers entre eux, alors a est premier avec tous les diviseurs de b .*

3.4 PGCD et PPCM

Proposition-Définition 17. *Soit a et b deux entiers naturels dont au moins l'un est non nul. Alors il existe un plus grand diviseur commun à a et b . On le note $\text{PGCD}(a, b)$ (ou parfois $a \wedge b$).*

De même, il existe un plus petit multiple commun à a et à b , on le note $\text{PPCM}(a, b)$ (ou parfois $a \vee b$).

Remarque 18. Soit a et b deux entiers non nuls. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- i) a et b sont premiers entre eux.
- ii) $\text{PGCD}(a, b) = 1$.
- iii) $\text{PPCM}(a, b) = ab$.

Proposition 19. *Soit a et b deux entiers dont au moins un est non nul. Alors*

$$\forall c \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} \text{PGCD}(ac, bc) = c \text{PGCD}(a, b) \\ \text{PPCM}(ac, bc) = c \text{PPCM}(a, b) \end{cases}.$$

4 Limites des fonctions

4.1 Cas des limites finies en un point

Définition 20 (Limite finie en un point). Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit également x_0 un réel de I ou une extrémité de I , si I est un intervalle ouvert. Par exemple, si $I =]0; 1[$, on s'autorisera à considérer $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$.

Si ℓ est un réel, on dit que f admet pour limite ℓ en x_0 si la proposition suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On note dans ce cas $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$.

4.2 Cas des limites infinies en un point

Définition 21. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ désignera une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit également x_0 un réel de I ou une extrémité de I .

i) On dit que f admet pour limite $+\infty$ en x_0 si la proposition suivante est vérifiée :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[, \quad f(x) \geq M.$$

On note dans ce cas $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$.

ii) On dit que f admet pour limite $-\infty$ en x_0 si la proposition suivante est vérifiée :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[, \quad f(x) \leq m.$$

4.3 Cas des limites finies en l'infini

Définition 22 (Limite finie en $x \rightarrow +\infty$). Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ désignera une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On supposera que I est un intervalle non majorée (c'est-à-dire qu'il est de type $[\alpha; +\infty[$ ou $] \alpha; +\infty[$ pour un certain réel α).

Si ℓ est un réel, on dit que f admet pour limite ℓ en $+\infty$ si la proposition suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in I \cap]a; +\infty[, \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On note dans ce cas $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

Exercice 23. Écrire la définition correspondante pour les limites en $x \rightarrow -\infty$.

4.4 Cas des limites infinies en l'infini

Définition 24 (Limite infinie en $x \rightarrow -\infty$). Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ désignera une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On supposera que I est un intervalle non minorée (c'est-à-dire qu'il est de type $] -\infty; \alpha]$ ou $] -\infty; \alpha[$ pour un certain réel α).

On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $x \rightarrow -\infty$ si la proposition suivante est vérifiée :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in I \cap] -\infty; a[, \quad f(x) \geq M.$$

On note dans ce cas $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$.

Exercice 25. Adapter la définition précédente pour :

- La limite $+\infty$ en $x \rightarrow +\infty$.
- La limite $-\infty$ en $x \rightarrow +\infty$.
- La limite $-\infty$ pour $x \rightarrow -\infty$.