Colles semaine 18

En bref

- Définition d'espaces vectoriels et de sous-espaces vectoriels. L'intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
- Familles libres et génératrices. Bases. Recherche de bases d'un ensemble de solutions de système linéaire.
- Bases canonique de $\mathbb{K}^n$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et de $\mathbb{K}_n[X]$
- Sous-espace engendrée par une famille finie. Notation $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Il est défini comme l'ensemble des combinaisons linéaire de la famille et on démontre que c'est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel contenant chacun des x_i.
- Somme de sous-espaces vectoriels. Notion de somme directe, notation $F \oplus G$ et $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.
- La somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.
- Application linéaire : définition.
- L'image directe ou réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel.
- Cas particulier du noyau et de l'image. Une application linéaire f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

i) Montrer que l'application $(x, y) \mapsto (2x, 3x + y, x - y)$ est linéaire ou tout autre exemple du même genre. *On se limitera à des exemples dans $\mathbb{K}^n$ pour les questions de cours, on pourra varier ensuite.*

ii) Étudier la liberté de la famille $\Big((1, 1, -1), (-1, 1, 1), (2, 1, 2)\Big)$. *On se limitera à des exemples dans $\mathbb{K}^n$ pour les questions de cours, on pourra varier ensuite.*

iii) Rappeler la définition de somme directe. montrer que $F \oplus G$ si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

iv) Si f est une application linéaire, définir $\text{Ker}(f)$ (ou $\text{Im}(f)$) et montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel.

v) Si f est une application linéaire, montrer qu'elle est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Note aux colleurs

- Nous n'avons encore vu aucune théorie de dimension.
- Le programme ne traite pas de sous-espaces vectoriels engendrés par une famille infinie de vecteurs.
- En théorie, le programme de PTSI ne traite pas la somme de plus que deux sous-espaces vectoriels. Comme cela apparaît ensuite en PT et pour éviter de trop s'habituer au critère miraculeux sur l'intersection, nous avons traité ce cas. Mais on évitera les exercices trop subtils sur la somme de plus que deux sous-espaces vectoriels.

En détail

1 Définition des espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Reprise du programme précédent

2 Combinaisons linéaires

2.1 Familles libres

Définition 1 (Famille libre)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est **libre** si elle vérifie l'implication suivante :

$$\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \implies \forall i \in [\![1\,;\,n]\!], \lambda_i = 0\right). \tag{1}$$

Autrement dit, la seule combinaison linéaire nulle de la famille est celle à coefficients tous nuls.

Notons que l'implication réciproque est vérifiée par toute les familles.

On appelle famille **liée** toute famille qui n'est pas libre.

Lemme 2 (Principe d'identification des coefficients d'une combinaison linéaire de famille libre)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille **libre** de vecteurs de E. Alors, pour toutes familles de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$:*

$$\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \iff \forall i \in [\![1\,;\,n]\!], \lambda_i = \mu_i\right). \tag{2}$$

Proposition 3. *Voici une liste de propositions élémentaires à propos des familles libres :*

- *i) Une famille contenant le vecteur nul est liée.*
- *ii) Une famille à un élément est libre si et seulement si l'unique élément de la famille est non nul.*
- *iii) Tous les éléments d'une famille libre sont distinct deux à deux.*
- *iv) Toute sous-famille d'une famille libre est encore libre.*
- *v) Toute sur-famille d'une famille liée est encore liée.*

Proposition 4. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. Alors, la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs x_i est combinaison linéaire des autres, c'est-à-dire combinaison linéaire de la famille $(x_1, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$.*

2.2 Familles génératrices

Définition 5 (Famille génératrice)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice de E si tout vecteur y de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de la famille $(x_1, \dots, x_n)$. Autrement dit si :

$$\forall y \in E,\ \exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

2.3 Bases

Définition 6. Une famille qui est à la fois une famille libre et une famille génératrice de E est appelée une base de E.

Proposition-Définition 7. *Beaucoup d'espaces vectoriels usuels sont muni de bases « naturelles » dite canonique.*

- *Dans $\mathbb{K}^n$, la famille $(e_1, \dots e_n)$ où $\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ e_i = \begin{pmatrix}0, & \dots, & 0, & \underset{i\text{-ème coef}}{1}, & 0, \dots & 0\end{pmatrix}$ est une base appelé base conique de $\mathbb{K}^n$.*
- *Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ définie ci-dessous est une base appelé base canonique de $\mathcal{M}_n(\imath)K$.*

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \forall j \in [\![1\,;p]\!],\ E_{i,j} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & j & & \\ & & \downarrow & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ i \longrightarrow \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- *Dans $\mathbb{K}_n[X]$, la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.*

2.4 Sous-espaces vectoriels engendrées par une famille

Définition 8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle sous-espace vectoriel engendré par une famille[1] $\mathcal{F}$ de E et on note $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ l'ensemble des combinaisons linéaires de cette famille. Autrement dit : si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille finie, alors :

$$\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \ :\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}. \tag{3}$$

Lemme 9 (le sous-espace engendré par une famille est le plus petit sous-espace vectoriel contenant la famille)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteur de E. Alors tout sous-espace vectoriel F de E qui contient la famille $(x_1, \dots, x_n)$ contient encore* $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$*.*

Remarque 10. Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ d'un espace vectoriel E est génératrice de E si et seulement si $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = E$.

3 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 11 (Somme de deux sous-espace vectoriel)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle somme de F et G et on note $F+G$ le sous-espace vectoriel :

$$F + G = \{x_F + x_G \ :\ x_F \in F,\, x_G \in G\}. \tag{4}$$

Le lecteur vérifiera que cela définit bien un sous-espace vectoriel.

---

[1] le programme officiel se limite au cas où la famille contient un nombre fini de vecteurs

Définition 12. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit également, $(F_1, \dots, F_n)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. On définit la somme des sous-espaces vectoriels comme le sous-espace vectoriel :

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \mid x_1 \in F_1, \dots, x_n \in F_n \right\}. \tag{5}$$

Le lecteur se convaincra que cette définition coïncide avec la précédente lorsque $n = 2$.

Remarque 13 (La somme de sous-espaces vectoriels est le plus petit sous-espace vectoriel contenant chacun des sous-espaces vectoriels). Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit également, $(F_1, \dots, F_n)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors, pour tout sous-espace vectoriel G de E on a l'implication suivante :

$$(\forall i \in [\![1\,;\,n]\!],\ F_i \subset G) \implies \sum_{i=1}^{n} F_i \subset G \tag{6}$$

Définition 14 (Somme directe)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(F_1, \dots, F_n)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i$ est directe et on note $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ si l'équivalence suivante est vérifiée :

$$\forall (x_1, \dots x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n,\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i = 0_E \implies \forall i \in [\![1\,;\,n]\!]\, x_i = 0_E \right). \tag{7}$$

Notons que l'implication réciproque « $\Leftarrow$ » est toujours vérifiée.

Proposition 15. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors, la somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.*

Attention : Cela ne se généralise malheureusement pas à plus de deux sous-espaces vectoriels. Le lecteur étudiera attentivement l'exemple dans $\mathbb{K}^2$ des sous-espaces vectoriels $F = \text{Vect}((1,0))$, $G = \text{Vect}((0,1))$ et $H = \text{Vect}((1,1))$ pour s'en convaincre.

Proposition 16. *Dans une somme directe, on a unicité de la décomposition d'un vecteur comme une somme d'élément de chaque sous-espace vectoriel. Plus précisément, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, n est un entier naturel non nul, $(F_1, \dots, F_n)$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E en somme directe et si $x \in F_1 + \cdots + F_n$; alors $\exists!(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n,\ x = x_1 + \cdots + x_n$.*

Définition 17. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(F_1, \dots, F_n)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. On dit que les sous-espaces vectoriels F_i sont supplémentaires s'ils vérifient les deux conditions suivantes :

i) La somme $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i$ est directe.

ii) Et cette somme est égale à E, c'est-à-dire $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} F_i = E$

Remarque 18. On prêtera attention, dans la définition précédente, à l'ordre dans lequel on impose ces deux conditions. Il n'est, en effet, pas question d'employer la notation $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} F_i$ avant d'avoir montré ou supposé que la somme était directe.

Proposition 19. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(F_1, \dots, F_n)$ une famille de sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Alors :*

$$\forall x \in E,\ \exists!\,(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n,\ x = x_1 + \cdots + x_n. \tag{8}$$

4 Applications linéaires

4.1 Terminologie

Définition 20. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application. On dit que f est une *application linéaire* ou encore un *morphisme d'espaces vectoriels* si elle vérifie les deux axiomes suivants :

i) $\forall (x,y) \in E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

ii) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Certains cas particuliers donnent lieu à un vocabulaire spécifique ; en reprenant les notations précédentes :

- Si $F = E$, on dit que f est un *endomorphisme.*
- Si f est bijective, on dit que c'est un *isomorphisme.*
- Si f est un endomorphisme bijectif, on dit que c'est un *automorphisme.*
- Si $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une *forme linéaire.*

Définition 21. Soit E et F deux espaces vectoriels. On dit qu'il sont *isomorphes* s'il existe un isomoprhisme d'espaces vectoriels entre E et F.

4.2 Propriétés des applications linéaires

Lemme 22. *Si $f : E \to F$ est un morphisme d'espaces vectoriels, alors $f(0_E) = 0_F$.*

Proposition 23 (Critère pratique pour étudier la linéarité d'une application)**.** *Soit $f : E \to F$ une application entre espaces vectoriels. L'application f est linéaire si et seulement si elle vérifie :*

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Proposition 24 (Images directes et réciproques de sous-espaces vectoriels)**.** *Soit $f : E \to F$ un morphisme d'espaces vectoriels ; alors :*

i) Pour tout sous-espace vectoriel A de E, son image directe $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F.

ii) Pour tout sous-espace vectoriel B de F, son image réciproque $f^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E

4.2.1 Noyaux et images

La proposition 24 possède deux cas particuliers d'applications très importants :

Proposition-Définition 25. *Soit $f : E \to F$ un morphisme d'espace vectoriel. Alors l'ensemble $f^{-1}(\{0_F\})$ est un sous-espace vectoriel de E que l'on appelle noyau de f et que l'on note* $\ker(f)$.

Proposition 26. *Une application linéaire $f : E \to F$ est injective si et seulement si* $\ker(f) = \{0_E\}$.

Proposition-Définition 27. *Soit $f : E \to F$ un morphisme d'espaces vectoriels. Alors l'ensemble $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F que l'on appelle image de f et que l'on note* $\mathrm{Im}(f)$.

Proposition 28. *Une application linéaire $f : E \to F$ est surjective si et seulement si* $\mathrm{Im}(f) = F$.