

Colles semaine 19

En bref

- Rappel sur l'algèbre linéaire, notamment :
 - Application linéaire : définition.
 - L'image directe ou réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel.
 - Cas particulier du noyau et de l'image. Une application linéaire f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- Dérivabilité des fonctions : formules de calculs.
- Propriétés globales des fonctions dérivables : théorème de Rolle, inégalité des accroissements finis et conséquences :
 - Unicité des primitives à une constante près,
 - Lien entre sens de variations et signe de la dérivée,
 - Théorème de prolongement des applications $\mathcal{C}^1$,
 - Stratégies d'étude des suites récurrentes de type $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Formule de Leibniz pour les dérivées d'ordre supérieures
- Formule de Taylor-Young et Inégalité de Taylor-Lagrange (admise). Cas classiques d'applications (pour $\sin$, $\cos$, $\exp$, etc.)
- Autres méthodes d'études des développements limités d'ordre supérieur : parité, somme, produit, intégration, composition si la compatibilité est assurée.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- i) Si f est une application linéaire, définir $\text{Ker}(f)$ (ou $\text{Im}(f)$) et montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel.
- ii) Si f est une application linéaire, montrer qu'elle est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- iii) Citer et démontrer le théorème de Rolle.
- iv) Citer et démontrer l'inégalité des accroissements finis (en admettant le théorème de Rolle)
- v) Citer sans démonstration la formule de Taylor-Young ou l'inégalité de Taylor-Lagrange. L'appliquer pour $\exp(x)$, $\ln(1+x)$, $\frac{1}{1+x}$, $\cos(x)$ ou autres exemples classiques.

Note aux colleurs

- Nous n'avons encore vu aucune théorie de dimension.
- Le programme ne traite pas de sous-espaces vectoriels engendrés par une famille infinie de vecteurs.
- La pratique des développements limités d'ordre supérieur à deux en reste à ses balbutiements, on évitera les questions trop techniques à ce sujet.

En détail

Algèbre linéaire

Reprise du programme précédent avec accent mis sur l'étude des applications linéaires.

Dérivabilité des fonctions : propriétés locales et globales

1 Dérivabilité

1.1 Dérivabilité en un point

Définition 1. Soient $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que f est **dérivable en a** si l'application

$$\tau_a : \begin{array}{ccc} I - \{a\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$

admet une limite finie en a . Dans ce cas, cette limite s'appelle le **nombre dérivé de f en a** et se note $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$.

Remarque 2. Quelques remarques sur cette définition :

- Pour tout $x \in I - \{a\}$, le réel $\tau_a(x)$ s'appelle le **taux d'accroissement** de la fonction f entre x et a . Que représente-t-il graphiquement ?
- Si f est dérivable en a , on a donc, quitte à changer de variable.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou encore} \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

- Le caractère dérivable d'une fonction en a est une propriété locale : si f et g sont deux fonctions qui coïncident au voisinage de a , f est dérivable en a si et seulement si g l'est. Dans ce cas, $f'(a) = g'(a)$.

Proposition 3 (Développement limité d'ordre 1). Soient $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Alors, f est dérivable en a si et seulement si il existe un réel α permettant d'écrire le développement limité suivants (ils sont équivalents) :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \alpha(x - a) + \varepsilon(x)(x - a)$$

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \alpha(x - a) + o(x - a).$$

Dans ce cas, le nombre α vérifiant la formule est unique et vaut $\alpha = f'(a)$.

1.2 Fonction dérivée

Définition 4 (Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

On dit que f est **dérivable sur I** si elle est dérivable en tout point de I . Dans ce cas, la

fonction $f' : \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$ s'appelle le **la fonction dérivée de f** .

Remarque 5. Si f est définie sur une réunion d'intervalles, on dit que f est dérivable si sa restriction à chaque intervalle de la réunion est dérivable.

Proposition 6 (Dérivable implique continue). *Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$, alors, f est continue en a .*

Remarque 7. Attention la réciproque est fautive. Exemple de $x \mapsto |x|$ qui est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

1.3 Opérations sur les fonctions dérivables

1.3.1 Opérations algébriques

Proposition 8 (Opérations algébriques). *Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en un point a de I .*

i) *Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ la combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ est dérivable en a et*

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

ii) *Le produit fg est dérivable en a et*

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

iii) *Si g ne s'annule pas en a , l'inverse $\frac{1}{g}$ est défini sur un voisinage de a , est dérivable en a et*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g^2(a)}$$

iv) *Si g ne s'annule pas en a , le quotient $\frac{f}{g}$ est défini sur un voisinage de a et est dérivable en a et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

1.3.2 Composition

Proposition 9 (Dérivée d'une composition). *Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications et $a \in I$. Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a).$$

Remarque 10. La proposition précédente ne donne qu'une condition suffisante pour la dérivabilité de $g \circ f$. Si f n'est pas dérivable en a ou g n'est pas dérivable en $f(a)$, on ne peut rien conclure. Il faut alors revenir à la définition. On pourra, à titre d'exemple, étudier l'exercice 11.

Exercice 11 (Dérivabilité des compositions). Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}_+$ de $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$. Puis la dérivabilité sur $\mathbb{R}_+$ de $x \mapsto \sqrt{e^x - x - 1}$.

1.3.3 Dérivation des bijections réciproques

Proposition 12 (Dérivée de la fonction réciproque en un point). *Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective et continue, $b \in J$ et $a = f^{-1}(b)$. On suppose que f est dérivable en a et que f^{-1} est continue en $f(a)$. Alors, f^{-1} est dérivable en b si et seulement si $f'(a) \neq 0$, et, dans ce cas,*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

2 Propriété globale des fonctions dérivables

2.1 Une propriété cruciale : l'inégalité des accroissements finis

Lemme 13 (Extremum local). *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et x_0 un **point intérieur** à I (c'est-à-dire que $x_0 \neq \inf(I)$ et $x_0 \neq \sup(I)$). Si f admet un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.*

Également, le fait que x_0 soit un point intérieur à I est crucial. Par exemple, la fonction

$$\begin{array}{ccc} [0; 1] & \rightarrow & [0; 1] \\ x & \mapsto & x \end{array}$$
admet un maximum local en 1, mais sa dérivée ne s'y annule pas.

Attention ! Bien sûr, ceci ne fournit qu'une condition suffisante pour l'existence d'un extremum local. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ a une dérivée qui s'annule en 0 mais n'a pas d'extremum en 0.

Théorème 14 (Théorème de Rolle). *Soit f une fonction dérivable sur un segment $[a; b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe un réel $c \in [a; b]$ vérifiant $f'(c) = 0$.*

Application 15. Si un polynôme réel P de degré n admet n racines réelles, alors son polynôme dérivé P' admet $n - 1$ racines réelles.

Théorème 16 (Égalité des accroissements finis). *Soit f une fonction dérivable sur un segment $[a; b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il existe alors un réel $c \in]a; b[$ vérifiant $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Ce théorème est principalement utilisé via son corollaire énoncé ci-dessous :

Corollaire 17 (Inégalité des accroissements finis). *Soit f une fonction dérivable sur un segment $[a; b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que la fonction dérivée f' vérifie $\forall x \in [a; b], m \leq f'(x) \leq M$. Alors, on peut écrire*

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Théorème 18 (Inégalité des accroissements finis, version alternative). *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . S'il existe un réel $M \geq 0$ tel que*

$$\forall t \in I, \quad |f'(t)| \leq M$$

alors,

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad |f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

2.2 Le(s) théorème(s) fondamental(aux) de l'analyse

Théorème 19 (Lien entre sens de variations et signe de la dérivée). *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.*

- *f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$.*
- *f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$.*

Corollaire 20. *Une fonction dérivable sur I est constante si et seulement si sa fonction dérivée est la fonction nulle.*

Proposition 21. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Cette fonction est strictement croissante sur I si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq 0$ et s'il n'existe aucun intervalle de longueur strictement positive sur lequel f' est constante nulle.*

Le lecteur adaptera tout seul cette proposition pour les fonctions strictement décroissantes.

Parlons enfin de primitives.

Proposition 22 (Unicité des primitives à une constante près). *Si f et g sont deux fonction dérivables sur un intervalle I et que $f' = g'$, alors il existe une constante C vérifiant $\forall x \in I, f(x) = g(x) + C$.*

Nous sommes maintenant en mesure d'explicitier le lien entre primitive et intégrale.

Théorème 23 (Théorème fondamental de l'analyse). *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. Alors, il existe une unique primitive de f qui s'annule en a . De plus, cette fonction est définie de la manière suivante :*

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt.$$

2.3 Application : retour sur les suites récurrentes

Exemple 24. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x+2}$. Soit également u une suite récurrente associée à f et vérifiant $u_0 > -1$.

- On remarque que l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ est stable par f .
- On étudie les points fixe de f sur cet intervalle. On voit qu'il en existe un unique que l'on note α . On va donc se demander si la suite u converge vers α .
- On a l'idée de poser $\varepsilon_n = |u_n - \alpha|$. On va alors étudier la suite ε à l'aide de l'inégalité des accroissements finis.

On laisse le soin au lecteur de poursuivre l'étude. Celui ci se demandera à la fin si ce travail peut d'adapter dans le cas où $u_0 < -1$.

2.4 Une autre application : prolongement de fonction $\mathcal{C}^1$.

Le résultat qui suit est souvent bien pratique pour étudier la dérivabilité de fonctions définies « par morceaux ».

Théorème 25 (Théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ ou théorème de limite de la dérivée). *Soit a, b deux réels avec $a < b$. Soit également f une fonction définie sur $[a; b[$ et à valeurs réelles. On suppose que les trois hypothèses suivantes sont satisfaites :*

- i) *La fonction f est continue sur le « fermé » $[a; b[$.*
- ii) *La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $]a; b[$.*
- iii) *La dérivée f' admet une limite finie en a que l'on note $\ell = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f'(x)$.*

Alors, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b[$ et $f'(a) = \ell$.

Remarque 26. Avec les mêmes hypothèses mais en supposant que la limite $\ell = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f'(x)$ est infinie, on conclurait que la fonction f est non dérivable en a et qu'elle y admet une demi-tangente verticale.

3 Dérivées itérées et raffinement des résultats précédents

3.1 Calculs pratiques de dérivées itérées

Définition 27. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et si sa fonction dérivée f' est continue sur I .

Exemple 28. i) Les fonctions polynomiales, exponentielles, etc. sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

ii) La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
 est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 29 (Dérivées successives). Soient $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On définit les dérivées successives de f par récurrence. On pose $f^{(0)} = f$. Pour un entier naturel n donné, on suppose la fonction $f^{(n)} : I \rightarrow \mathbb{R}$ déterminée. Si $f^{(n)}$ est dérivable en a , on pose $f^{(n+1)}(a) = (f^{(n)})'(a)$, et si $f^{(n)}$ est dérivable sur I , on pose $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Lorsqu'il existe, le nombre $f^{(n)}(a)$ s'appelle **le nombre dérivé n -ième de f en a** . On dit alors que f est n fois dérivable en a .

Lorsqu'elle existe, la fonction $f^{(n)}$ s'appelle **la dérivée n -ième de f** . On dit alors que f est n fois dérivable sur I .

On dit, de plus, que f est de **classe $\mathcal{C}^n$ sur I** si $f^{(n)}$ existe et est continue sur I .

Une fonction est dite de **classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I** si elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout entier naturel n .

Remarque 30. On note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de I dans $\mathbb{R}$. On note aussi $f^{(n)}(a) = \frac{d^n f}{dx^n}(a)$ et $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$.

Proposition 31 (Formule de Leibniz). Soit f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I . Alors le produit fg est n fois dérivable sur I et

$$\forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

3.2 Notion de développements limités

Définition 32 (Développement limité). Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit a un réel et soit f une fonction définie sur un voisinage de a , sauf éventuellement en a . On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a (parfois abrégé en $DL_n(a)$) s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} P(x) + o((x-a)^n).$$

Remarque 33. Si f admet un développement limité d'ordre n en a , on dispose donc de coefficients $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ vérifiant :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k h^k + o(h^n).$$

Remarque 34 (Unicité de la partie régulière d'un développement limité). Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit a un réel et soit f une fonction définie sur un voisinage de a , sauf éventuellement en a . On suppose que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a . Alors il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$ de degré au plus n tel que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} P(x) + o((x-a)^n).$$

Ce polynôme P est parfois appelé la *partie régulière* du développement limité.

3.2.1 Formules de Taylor

Théorème 35 (Inégalité de Taylor-Lagrange). *Soient $n \in \mathbb{N}$; f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in I$. S'il existe une constante M_{n+1} vérifiant $\forall x \in I, |f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$; alors :*

$$\forall h \in \mathbb{R}, a + h \in I \implies \left| f(a + h) - \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M_{n+1} \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Remarque 36. Cette inégalité de Taylor-Lagrange est encore valable pour les fonctions à valeurs complexes.

Théorème 37 (Formule de Taylor-Young). *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I d'intérieur non vide contenant 0. Alors, pour tout $x \in I$,*

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + o(x^n).$$

Remarque 38. De même, cette formule de Taylor-Young s'étend aux fonctions à valeurs complexes.

Application 39. Voici une série de développements limités en zéro classiques et à connaître :

$$\begin{aligned} \exp(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \operatorname{ch}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ \operatorname{sh}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ \cos(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ \sin(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ \ln(1+x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\ (1+x)^\alpha &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n), \quad (\text{pour } \alpha \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

en particulier :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \\ \frac{1}{1+x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\ \sqrt{1+x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} x^n + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n-1)2^{2n}} x^n + o(x^n) \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} x^n + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

(1)

Enfin, le programme stipule que le développement limité de tangente à l'ordre 3 doit être connu :

Proposition 40. $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

3.2.2 Calcul pratiques de développement usuels

Proposition 41. Soient f et g deux applications définies sur I et admettant en 0 les développements limités à l'ordre n suivants

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n).$$

Alors, la fonction $f + g$ admet, au voisinage de 0 , le développement limité à l'ordre n suivant

$$f(x) + g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + Q(x) + o(x^n).$$

Le produit de développements limités recèle quelques subtilités.

Lemme 42. Soient f et g deux applications définies sur I et admettant en 0 les développements limités à l'ordre n suivants

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n).$$

Alors, on peut écrire au voisinage de zéro :

$$f(x)g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x)Q(x) + o(x^n).$$

Attention ! Se frotter immédiatement à l'exercice suivant sous peine de mal interpréter l'énoncé de ce lemme.

Exercice 43. Calculons un développement limité d'ordre 2 en zéro de $\frac{\cos(x)}{1-x}$.

Attention ! Le lecteur tout à son enthousiasme, aura sans doute envie de calculer le produit $(1 - \frac{x^2}{2})(1 + x + x^2) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2}$. Il en déduirait peut-être hardiment la formule suivante $\frac{\cos(x)}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + o(x^2)$.

Remarquons maintenant qu'une telle formule est parfaitement juste mais également incroyablement stupide !

Le lecteur qui n'en verrait pas le caractère stupide méditera avec attention la phrase suivante : « De toutes nouvelles mesures scientifiques ont montré que le rayon de la Terre valait 6 402,31 km avec une précision de 100 km. »

La composition de développements limités est soumise au même subtilité que le produit.

Proposition 44. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ contenant 0 , $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications admettant des développements limités en 0 à l'ordre n qui s'écrivent

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} Q(t) + o(t^n)$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, alors, la fonction $g \circ f$ admet, au voisinage de 0 , un développement limité à l'ordre n qui peut être calculé à partir de la formule suivante :

$$g(f(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} (Q \circ P)(x) + o(x^n).$$

Attention ! Pour la même raison que pour le produit de développement limité, on prendra garde à ne pas conclure trop hâtivement que $(Q \circ P)$ constitue un développement limité de $g \circ f$.

Proposition 45 (Intégration de DL). *Si l'application f continue sur I admet un développement limité à l'ordre n en 0 , de partie régulière notée P , alors toute primitive F de f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 dont la partie régulière est obtenue par intégration de la partie régulière de f . Ainsi,*

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} F(0) + \int_0^x P(t) dt + o(x^{n+1})$$

Autrement dit, si

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

alors,

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$$

Remarque 46. On prêtera une attention toute particulière, à la précision des développements limités qui est modifiée au cours d'une telle opération.

Lemme 47. *Si f admet un développement limité en zéro et si f est paire (respectivement impaire), alors le polynôme correspondant au développement limité est également pair (respectivement impair).*