Colles semaine 20

En bref

- Dérivabilité des fonctions : formules de calculs.
- Propriétés globales des fonctions dérivables : théorème de Rolle, inégalité des accroissements finis et conséquences :
  - Unicité des primitives à une constante près,
  - Lien entre sens de variations et signe de la dérivée,
  - Théorème de prolongement des applications $\mathcal{C}^1$,
  - Stratégies d'étude des suites récurrentes de type $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Formule de Leibniz pour les dérivées d'ordre supérieures
- Formule de Taylor-Young et Inégalité de Taylor-Lagrange (admise). Cas classiques d'applications (pour sin, cos, exp, etc.)
- Autres méthodes d'études des développements limités d'ordre supérieur : parité, somme, produit, intégration, composition si la compatibilité est assurée.
- Polynômes :
  - Définition, formules de calcul pour les coefficients d'un produit de polynômes.
  - Définition du degré, degré d'une somme, d'un produit, d'une composée de polynômes.
  - Formule de Taylor polynomiale.
  - Arithmétique : multiples, diviseurs, théorème de division euclidienne.
  - Racines et multiplicité. Lien entre multiplicité et racine de la dérivée.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

i) Citer et démontrer le théorème de Rolle.

ii) Citer et démontrer l'inégalité des accroissements finis (en admettant le théorème de Rolle)

iii) Citer sans démonstration la formule de Taylor-Young ou l'inégalité de Taylor-Lagrange. L'appliquer pour $\exp(x)$, $\ln(1+x)$, $\frac{1}{1+x}$, $\cos(x)$ ou autres exemples classiques.

iv) Citer le théorème de division euclidienne pour les polynômes. Montrer l'unicité dans ce théorème.

v) Montrer que α est une racine de P si et seulement si $P(\alpha) = 0$.

vi) Si α est une racine de P de multiplicité m, α est-il racine de P' ? quid de sa multiplicité ? *On démontrera les résultats annoncés.*

Note aux colleurs

- Nous avons évoqué brièvement la construction des polynômes comme suite stationnaire nulle, mais rien n'est exigible à ce sujet. Pour nous, un polynôme s'identifie à sa fonction polynomiale.
- Pour les colles de lundi, on se limitera à des questions de cours sur les polynômes. Mercredi, on pourra donner quelques exercices sur les polynômes.

En détail

Dérivabilité des fonctions : propriétés locales et globales

Reprise du programme précédent

Polynômes

1 Brève construction et propriété élémentaires

1.1 Définition

Définition 1 (Polynôme)**.** Soit P une fonction définie sur $\mathbb{K}$ à valeur dans $\mathbb{K}$. On dit que P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une famille $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ de scalaires tels que :

$$\forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Les scalaires $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ sont alors appelés les *coefficients* du polynômes.

Notation 2. On note $X : x \mapsto x$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}, X^n : x \mapsto x^n$ (ce qui est compatible avec le produit de fonction).

Alors, le polynôme P vérifiant $\forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ se note $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$

Notation 3. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$.

1.2 Degré

Proposition-Définition 4. *Soit P une fonction polynomiale qui n'est pas la fonction constante nulle.*

Il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ et une unique famille $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $\mathbb{K}^n$ telles que

$$\begin{cases} a_n \neq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k. \end{cases}$$

L'entier n s'appelle alors le degré de P et on note $n = \deg(P)$. Les réels $(a_0, \dots, a_n)$ s'appellent alors les coefficients *de P.*

Remarque 5. On pose parfois par convention que le degré du polynôme nul est égal à $-\infty$.

Notation 6. Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Ainsi $\mathbb{K}_0[X]$ représente l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$. Et $\mathbb{K}_1[X]$ représente l'ensemble des fonctions affines sur $\mathbb{R}$.

Proposition 7 (Formule de Taylor polynomiale)**.** *Soit n un entier naturel. Pour tout polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ et pour tout réel a, on a la formule suivante :*

$$\forall a \in \mathbb{K},\ P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

1.3 Propriété algébrique

Proposition 8. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 9 (Coefficients d'un produit de polynômes)**.** *Soit* $P = \sum\limits_{n=0}^{p} a_n X^n$ *et* $Q = \sum\limits_{n=0}^{q} b_n X^n$ *deux polynômes de degrés respectifs* p *et* q*, on note* $R = PQ$*. On note* $(c_0, \dots, c_n, \dots)$ *les coefficients de* R*, c'est-à-dire* $R = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n X^n$*. Alors les coefficients* c_n *se calculent grâce à la formule suivante :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Corollaire 10. *Si* P *et* Q *sont deux polynômes non nuls, alors* $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$*.*

Proposition 11 (Dérivée d'une somme et d'un produit)**.** *Soit* P *et* Q *deux polynômes et* α *et* β *deux réels. Alors :*

i) $(\alpha P + \beta Q)' = \alpha P' + \beta Q'$.

ii) $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

Définition 12. Soit $P : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme non nul de degré n. On appelle polynôme dérivée de P et on note P' le polynôme $P' : x \mapsto= \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$. Si P est le polynôme nul, on définit $P' = 0$.

Remarque 13. Si P est à coefficient réel, cela est en fait un lemme assez simple. En revanche, si P est à coefficients complexes, il s'agit bien d'une définition car on ne sait pas dériver les fonctions de la variable complexe.

Lemme 14 (Degré d'une dérivée)**.** *Soit* P *un polynôme de degré* p*. Alors* P' *est de degré* $p-1$ *si* $p \geqslant 1$ *et* P' *est le polynôme nul si* P *est un polynôme constant.*

Définition 15. Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ un polynôme et Q un autre polynôme. On définit le polynôme $P \circ Q$ comme le polynôme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k Q^k$. *En prenant la convention* $Q^0 : x \mapsto 1$.

On peut également utiliser la notation $P \circ Q = P(Q)$.

Comme toujours, la somme contient un nombre fini de termes.

Proposition 16 (La composition est linéaire à gauche)**.** *Soit trois polynômes* P*,* Q *et* R *; alors* $(P+Q) \circ R = P \circ R + Q \circ R$

Attention. *La composition n'est pas linéaire à droite* ! Considérons $P = X^2$, $Q : x \mapsto x + 2$ et $R = x$. Comparons $P \circ (Q + R)$ et $P \circ Q + P \circ R$.

Lemme 17 (degré d'une composition)**.** *Soit* P *et* Q *deux polynômes non constants. Alors,* $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \deg(Q)$*.*

Attention ! Attention, lorsque Q est constant, $P \circ Q$ est constant mais peut être le polynôme nul même si Q n'est pas nul.

Proposition 18 (dérivée d'une composée)**.** *Soit* P *et* Q *deux polynômes. Alors* $(P \circ Q)' = (P' \circ Q)\, Q'$*.*

2 Arithmétique des polynômes

2.1 Diviseurs et multiples

Définition 19. Soient P et Q deux polynômes. S'il existe un polynôme D tel que $P = QD$ alors on dit que P est un multiple de Q ou encore que Q est un diviseur de P. On note parfois $Q \mid P$ pour dire que Q divise P.

Lemme 20. *Si P est un multiple non nul du polynôme Q, alors* $\deg(P) \geqslant \deg(Q)$.

Proposition 21 (Propriétés élémentaires de la relation de divisibilité)**.** *Soit P, Q et R trois polynômes ainsi que α et β deux réels.*

i) Si P divise Q et P divise R, alors P divise $(\alpha Q + \beta R)$.

ii) Si P divise Q, alors P divise (QR).

iii) Si P divise Q et Q divise R, alors P divise R.

Théorème 22 (Théorème de division euclidienne pour les polynômes)**.** *Soit P un polynôme et D un autre polynôme non nul. Alors il existe un unique couple de polynômes (Q, R) vérifiant les deux conditions suivantes :*

$$\begin{cases} P = DQ + R \\ \deg(R) < \deg(Q) \end{cases}.$$

Ces polynômes Q et R sont alors respectivement appelés quotient *et* reste *dans la division euclidienne de P par Q.*

2.2 Racines et zéro

2.2.1 Définitions

Définition 23 (Zéro d'un polynôme)**.** On dit qu'un scalaire α est un zéro d'un polynôme P si $P(\alpha) = 0$; autrement dit, si α est un zéro de la fonction polynomiale associée à P.

Définition 24 (Racine d'un polynôme)**.** On dit qu'un scalaire α est une racine d'un polynôme P si P est un multiple de $(X - \alpha)$.

Théorème 25. *Soit P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{K}$ un scalaire, alors α est une racine de P si et seulement si c'est un zéro de P.*

Proposition 26. *Si P est un polynôme non-nul de degré n. Alors, P admet au plus n racines différentes.*

Corollaire 27 (Un polynôme qui admet plus de racines que son degré est nul)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Si P est un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui admet au moins $n + 1$ racines distinctes, alors P est le polynôme nul.*

Corollaire 28 (Variantes)**.** *Le corollaire précédent peut s'énoncer sous diverses versions :*

- *Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ qui coïncident en $n+1$ points distincts. C'est-à-dire s'il existe $n + 1$ scalaire distincts $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ tels que $\forall i \in [\![1\,;\, n + 1]\!],\ P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$. Alors $P = Q$.*
- *Si P est un polynôme (sans contrainte de degré) qui admet une infinité de racines, alors c'est le polynôme nul.*
- *Si P et Q sont deux polynômes qui coïncident en une infinité de points, alors ils sont égaux.*

2.2.2 Multiplicité des racines

Définition 29. Soit α une racine d'un polynôme P et $m \in \mathbb{N}^*$. On dit que α est un racine de multiplicité m dans P si $(X-\alpha)^m$ divise P mais que $(X-\alpha)^{m+1}$ ne divise pas P.

On dit qu'une racine est simple si elle est de multiplicité égale à 1. On dit qu'elle est multiple dans le cas contraire.

Remarque 30. Par convention, on dit parfois que les multiplicité des racines du polynôme constant nul sont infinies. Le lecteur s'attachera à comprendre en quoi cette convention est compatible avec l'ensemble des résultats suivants.

Proposition 31. *Soit α une racine d'un polynôme P non constant.*
- *Si α est une racine simple de P, alors ce n'est pas une racine de P'.*
- *Si α est une racine multiple de multiplicité $m \geqslant 2$, alors α est une racine de multiplicité $m-1$ de P'.*

Corollaire 32. *Soit P un polynôme non nul, α une racine de P et m un entier naturel non nul. Alors α est une racine de multiplicité m si et seulement si il existe un polynôme Q vérifiant les deux conditions suivantes :*

i) $P = (X-\alpha)^m Q$

ii) et α n'est pas une racine de Q.

Corollaire 33. *Soit P un polynôme non nul, α une racine de P et m un entier naturel non nul. Alors α est une racine de multiplicité m si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

i) $P(\alpha) = P'(\alpha) = P^{(2)}(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$

ii) et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

On peut enfin écrire un dernier lemme qui permet parfois de caractériser la multiplicité d'une racine.

Corollaire 34. *Soit P un polynôme non constant et α une racine de Pde multiplicité m. Alors α est une racine simple de $P^{(m-1)}$. On peut même écrire*

$$m = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid P^{(k)}(\alpha) \neq 0 \right\}.$$

2.2.3 Le théorème fondamental de l'algèbre

Commençons par un lemme de bonne foi à la preuve aisée.

Lemme 35. *Soit P un polynôme non nul, alors le nombre de ses racines comptées avec leur multiplicité est inférieur ou égal à son degré.*

En fait on peut montrer, c'est un résultat très fort, que l'inégalité précédente est toujours une égalité dans le cas des polynômes complexes. Voici donc le clou du chapitre :

Théorème 36 (Théorème de D'Alembert-Gauss (Admis))**.** *Soit P un polynôme **à coefficient complexe** non nul de degré n. Alors P possède exactement n racines comptées avec leur ordre de multiplicité.*