Colles semaine 21

En bref

- Polynômes :
  - Définition, formules de calcul pour les coefficients d'un produit de polynômes.
  - Définition du degré, degré d'une somme, d'un produit, d'une composée de polynômes.
  - Formule de Taylor polynomiale.
  - Arithmétique : multiples, diviseurs, théorème de division euclidienne.
  - Racines et multiplicité. Lien entre multiplicité et racine de la dérivée.
  - Polynômes irréductibles ; dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
  - Théorème fondamental de l'algèbre (dit aussi de D'Alembert-Gauss). Forme factorisée des polynômes, relation coefficients racines.
  - Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles lorsque le dénominateur est scindé à racine simples.
- Séries numériques complexes :
  - Définition et généralités, liens suites-séries. Reste d'une série convergente.
  - Théorème de comparaison de séries **réelles positives** : par inégalités exactes ou par équivalent asymptotique.
  - Séries de référence : géométriques, de Riemann et exponentielle.
  - Critère d'absolue convergence pour les séries non positives.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

i) Citer le théorème de division euclidienne pour les polynômes. Montrer l'unicité dans ce théorème.

ii) Montrer que α est une racine de P si et seulement si $P(\alpha) = 0$.

iii) Si α est une racine de P de multiplicité m, α est-il racine de P' ? quid de sa multiplicité ? *On démontrera les résultats annoncés.*

iv) Pour un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, comment calculer la somme, le produit de ses racines (comptées avec multiplicité) en fonction de ses coefficients ? Preuve ?

v) Citer et montrer le lien suite-séries (c'est-à-dire la suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ ont même nature).

vi) Citer le résultat général sur les séries de Riemann. Montrer les cas de convergence ou ceux de divergence (au choix du colleur).

vii) Citer et démontrer le théorème de comparaison des séries par inégalités exactes.

Note aux colleurs

- Concernant la décomposition en éléments simples, seul le cas où le dénominateur est scindé à racine simple est au programme. Dans les autres cas, le colleur doit donner aux étudiant la forme à chercher. D'ailleurs, aucune théorie générale des fractions rationnelles n'a été donné. Cela est uniquement utilisé comme un intermédiaire de calcul (pour des dérivées itérées, des intégrales ou des séries)
- Nous avons évoqué le théorème de comparaison des séries positives par domination asymptotique. Mais officiellement, ce dernier n'apparaît qu'au programme de deuxième année.
- Pour cette première semaine de colle sur les séries, on évitera toute question subtile concernant des séries non positives (mais on attend des étudiants qu'ils vérifient et rappellent le rôle de la positivité si nécessaire).

En détail

Dérivabilité des fonctions : propriétés locales et globales

Reprise du programme précédent

Polynômes

Reprise du programme précédent avec deux précisions

0.1 Polynômes irréductibles

Définition 1. Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit *irréductible* s'il n'est pas constant et si tous ses diviseurs sont constants ou de degré égal à $\deg(P)$.

Remarque 2. Pour la première fois du chapitre, cette notion dépend fondamentalement du corps $\mathbb{K}$. Ainsi, le polynôme X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{R}$ (prouvez le) mais pas dans $\mathbb{C}$ car il admet, par exemple $X - \mathrm{i}$ pour diviseur.

Théorème 3 (Reformulation de D'Alembert-Gauss)**.** *Les polynômes irréductibles diffèrents dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$.*

— *Dans $\mathbb{C}[X]$, les irréductibles sont exactement les polynômes de degré 1.*
— *Dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes irréductibles sont de l'un des deux types suivant :*
  i) les polynômes de degré 1,
  ii) les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

Proposition 4 (factorisation des polynômes complexes)**.** *Soit P un polynôme complexe non constant. On note $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_r)$ ses racines et $(m_1, m_2, \ldots, m_r)$ leur multiplicité respective.*

Alors on dispose d'un scalaire a tel que :

$$P = a \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i}.$$

Le lecteur, fin limier, comprendra bien sûr que le scalaire a n'est autre que le coefficient dominant du polynôme P et que le degré du polynôme s'exprime alors comme $\deg(P) = \sum_{i=1}^{r} m_i$.

Définition 5. Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est dit *scindé* s'il peut s'écrire comme un produit de polynômes de degré 1.

Théorème 6 (Troisième formulation du théorème de D'alembert-Gauss)**.** *Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.*

Théorème 7 (Factorisation des polynômes réels)**.** *Soit P un polynôme réel non constant. Alors on dispose d'un scalaire a, de deux entiers naturels et s et r ; de trois familles de scalaires $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, $(\beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \ldots, \beta_{r+s})$ et $(\gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \ldots, \gamma_{r+s})$ ainsi que d'une famille $(m_1, \ldots, m_r, m_{r+1}, \ldots, m_{r+s}))$ d'entiers naturels non nuls de sorte que*

$$P = a \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{k=r+1}^{r+s} (X^2 + \beta_k X + \gamma_k)^{m_k}.$$

et de sorte que : $\forall k \in [\![r+1\,;\,r+s]\!]$, $\beta_k^2 - 4\gamma_k < 0$. Le lecteur, fin limier, comprendra bien sûr que le scalaire a n'est autre que le coefficient dominant du polynôme P et que le degré du polynôme se calcule par $\deg(P) = r + 2s$

0.2 Fractions rationnelles

Définition 8 (Pôle d'une fraction rationnelle)**.** Soient $F = \frac{P}{Q}$ dans $\mathbb{K}(X)$ écrite sous forme irréductible, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{N}^*$.
On dit que α est un *pôle* de F, avec la multiplicité μ, lorsque α est une racine du polynôme Q de multiplicité μ, soit lorsque

$$F = \frac{P}{(X-\alpha)^\mu Q_1} \quad \text{avec } \ P(\alpha) \neq 0 \ \text{ et } \ Q_1(\alpha) \neq 0.$$

Remarque 9. Il est primordial que F soit écrite sous forme irréductible dans la définition suivante. En particulier, cela implique que α n'est pas racine du numérateur P.

Proposition 10 (Décomposition en éléments simples lorsque le dénominateur est scindé à racines simples)**.** *Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ une famille de scalaires. Soit également P un autre polynôme qui n'admet aucun des α_i pour racine. Alors, il existe une (et une unique) famille de scalaire $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ et un (et un unique) polynôme E tel que :*

$$\frac{P}{\prod_{k=1}^n (X-\alpha_k)} = E + \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{X-\alpha_k}. \tag{1}$$

Remarque 11. Le polynôme E se calcule comme le quotient dans la division euclidienne de P par $Q := \prod_{k=1}^n (X-\alpha_k)$.

Pour calculer les coefficients λ_k, le plus simple est de déterminer un équivalent de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ au voisinage de $x = \alpha_k$.

Séries numériques

1 Généralités

Définition 12. Soit u une suite réelle. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la **somme partielle** d'indice n, notée S_n, par

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée la **série** associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou encore *la série de terme général* $\boldsymbol{u_n}$. On la note parfois $\sum u_n$.

Définition 13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. On dit que la série $\sum u_k$ **converge** lorsque la suite des sommes partielles est convergente. La limite de la série s'appelle **la somme de la série** et se note $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Proposition 14 (Lien suites-série)**.** *Soit u une suite réelle. On pose alors une nouvelle suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n := u_{n+1} - u_n$. Alors la suite u converge si et seulement si la série $\sum w_n = \sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.*

Proposition 15. *Si u et v sont deux suites telles que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ soient convergentes ; alors, pour tout scalaire λ la série $\sum (\lambda u_n + v_n)$ est encore convergente et l'on peut écrire :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

En d'autres termes l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel et l'application qui à une série convergente associe la somme de sa série est une forme linéaire.

Attention ! L'égalité de la proposition précédente est vraie si chacune des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est convergente. En revanche, il se peut que ses séries soient divergentes mais que la série $\sum(\lambda u_n + v_n)$ soit convergente. On pourra considérer l'exemple de $u_n = n+1$, $v_n = n+1$ et $\lambda = -1$.

Proposition-Définition 16 (Reste d'une série convergente). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont la série $\sum u_n$ converge. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n)_{n>p}$ est le terme général d'une série convergente. La somme de cette série est appelée p-ième reste de la série $\sum u_n$ et se note R_p. Autrement dit :*

$$R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{p} u_n$$

.

Lemme 17. *Soit u_n le terme général d'un série convergente et $p \mapsto R_p$ la suite de ses restes. Alors $\lim\limits_{p\to\infty} R_p = 0$.*

2 Cas des séries réelles positives

Proposition 18 (Une remarque de bon sens mais fort utile). *Soit u une suite à valeurs réelles positives. Alors la suite $n \mapsto S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_n$ est croissante et donc la série $\sum u_n$ converge si et seulement si elle majorée.*

2.1 Théorèmes de comparaison des séries positives

Proposition 19 (Comparaison par minoration/majoration). *Soient u et w deux suites réelles **positives**. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant w_n$, alors :*

i) Si la série $\sum w_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge également.

ii) Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum w_n$ diverge également.

Proposition 20 (Comparaison par équivalent). *Soient u et w deux suites réelles positives. Supposons que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} w_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$ sont de même nature.*

3 Séries de références

3.1 Les séries géométriques

Proposition 21 (Séries géométrique). *Soit $q \in \mathbb{C}$. La série $\sum\limits_n q^n$ est :*

- *convergente si $0 \leqslant |q| < 1$ (et dans ce cas, la somme de la série vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$),*
- *divergente (grossièrement) si $|q| \geqslant 1$.*

3.2 Les séries de Riemann

Proposition 22 (Séries de Riemann). *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum\limits_n \dfrac{1}{n^\alpha}$ est :*

- *convergente si $\alpha > 1$,*
- *divergente si $\alpha \leqslant 1$.*

3.3 Les séries exponentielles

Proposition 23 (Série exponentielle). *Soit x un complexe fixé. La série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente et sa somme vaut $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$.*

4 Cas des séries non positives

4.1 Un critère suffisant de convergence, l'absolue convergence

Définition 24. Soit u une suite réelle. On dit que la série $\sum u_k$ **converge absolument** si la série $\sum |u_k|$ converge.

L'intérêt de cette notion réside dans la proposition suivante.

Proposition 25. *Une série absolument convergente est convergente.*

4.2 Et sinon ?

Attention ! On se méfiera comme du diable des séries qui ne sont pas de termes positifs et on tournera sept fois son stylo dans sa main avant de proférer des bêtises !