Colles semaine 22

En bref

- Séries numériques complexes :
  - Définition et généralités, liens suites-séries. Reste d'une série convergente.
  - Théorème de comparaison de séries **réelles positives** : par inégalités exactes ou par équivalent asymptotique.
  - Séries de référence : géométriques, de Riemann et exponentielle.
  - Critère d'absolue convergence pour les séries non positives.
- Dimension des espaces vectoriels :
  - Définition de la dimension. Cardinal des bases, des familles génératrices, des familles libres.
  - Dimension et somme de sous-espaces vectoriels : formule de Grassmann, nouvelles méthodes de preuve de supplémentarité.
  - Rang d'une famille de vecteur. Cas des familles libres ou génératrices. Le rang est préservé par les opérations élémentaires. On en déduit un algorithme de détermination du rang par élimination successives de vecteurs combinaison linéaire des autres vecteurs.
  - Notion de famille échelonnée sur une autre. Cette opération préserve le caractère libre ou générateur des familles.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

i) Citer et montrer le lien suite-séries (c'est-à-dire la suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ ont même nature).

ii) Citer le résultat général sur les séries de Riemann. Montrer les cas de convergence ou ceux de divergence (au choix du colleur).

iii) Citer et démontrer le théorème de comparaison des séries par inégalités exactes.

iv) Montrer que si la somme $F + G$ est directe ; alors $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$.

v) Montrer que si $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$, alors la somme $F + G$ est directe.

vi) Montrer que les opérations élémentaires sur les familles préservent le rang.

Notes aux colleurs

- La méthode des séries alternées a été vue sur un exemple mais ce n'est pas un objectif de cette semaine de colle.
- La notion de rang d'une application linéaire et les théorèmes pertinents ont été vus en cours mais cela ne figure pas encore dans le programme de colle de cette semaine.

En détail

Séries numériques

Reprise du programme précédent.

Dimension des espaces vectoriels

1 Définir la dimension

1.1 Point de vue théorique

Théorème 1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un espace vectoriel (de dimension finie ou non), soit également $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors les trois affirmations suivantes sont équivalentes :*

i) La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

ii) La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre maximale de E. C'est-à-dire que toute sur-famille stricte est liée.

iii) La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice minimale de E. C'est-à-dire qu'aucune sous-famille stricte n'est pas génératrice de E.

Lemme 2 (Lemme fondamental)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que l'on dispose d'un entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$ et d'une famille génératrice de E : $(x_1, \dots, x_n)$. Alors, toute famille de vecteurs de E de cardinal supérieur ou égal à $n+1$ est liée.*

Corollaire 3 (Existence de bases en dimension finie)**.** *Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.*

Théorème 4 (Théorème de la base incomplète)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de E. Alors, on peut compléter cette famille en une base de E. Autrement dit, on dispose d'un entier $p \in \mathbb{N}$ et d'une famille $(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+p})$ de p vecteurs telle que la concaténation $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p})$ soit une base de E.*

Proposition-Définition 5 (Théorème de la dimension)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors E admet au moins une base et toutes les bases de E sont de même cardinal fini. Ce cardinal commun est appelée dimension de E et se note* $\dim_{\mathbb{K}}(E)$*, ou simplement* $\dim(E)$ *lorsque le corps $\mathbb{K}$ est sous-entendu.*

1.2 Conséquences pratiques

Proposition 6. *Soit E de dimension n et $\mathcal{B}$ une famille de vecteur de E. Si deux des trois propositions suivantes sont vérifiées, alors la troisième l'est aussi et dans ce cas, la famille $\mathcal{B}$ est une base de E.*

i) $\mathcal{B}$ est une famille libre.

ii) $\mathcal{B}$ est une famille génératrice.

iii) $\mathcal{B}$ est de cardinal n.

Proposition 7. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots e_n)$. On peut définir une application de $\mathbb{K}^n$ dans E de la manière suivante :*

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \to & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \mapsto & \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \end{array}$$

Alors l'application φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Corollaire 8. *Deux espaces vectoriels ont même dimension si et seulement si ils sont isomorphes. En particulier, un espace vectoriel est de dimension n si et seulement si il est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.*

Proposition-Définition 9. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Alors pour tout vecteur $a \in E$, il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que*
$a = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_i e_i$. *Cette famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est appelée* les coordonnées *du vecteur a dans la base $\mathcal{B}$.*
Ces coordonnées sont parfois notées matriciellement $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, pour des raisons qui apparaîtront claires ultérieurement

2 Dimension est sous-espaces vectoriels

2.1 Prologue

Proposition 10. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si deux des trois propositions suivantes sont vérifiées alors la troisième l'est aussi :*

i) $F \subset G$

ii) $G \subset F$

iii) $\dim(F) = \dim(G)$

2.2 Cas des sommes de sous-espaces vectoriels

Lemme 11 (Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels)**.** *Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. On a* $\dim(F + G) \leqslant \dim(F) + \dim(G)$.

Théorème 12 (Caractérisation des sommes directes)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$, E un espace vectoriel de dimension n et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si deux des trois propositions suivantes sont vérifiées, alors la troisième l'est aussi et dans ce cas, F et G sont supplémentaires :*

i) $F + G = E$

ii) La somme $F + G$ est directe.

iii) $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$

Corollaire 13 (Existence de supplémentaire)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors, il existe un supplémentaire de F dans E.*

Proposition-Définition 14 (Base adaptée à une somme directe)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe. On se donne une base $(f_1, \dots, f_p)$ de F et une base $(g_1, \dots, g_q)$ de G. Alors la concaténation $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base du sous-espace vectoriel $(F \oplus G)$. Une telle base est dite* adaptée à la somme directe *$F \oplus G$.*

Proposition 15 (Formule de Grassmann)**.** *Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.*

3 Rang des familles

3.1 Définitions

Définition 16. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel et $(x_1, \dots x_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle *rang* de la famille $(x_1, \dots, x_p)$ et on note $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p)$ la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.

Remarque 17. Dans cette définition, l'espace ambiant E peut très bien être de dimension infinie.

Lemme 18. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel et $(x_1, \dots x_p)$ une famille de vecteurs de E. On a*
$\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) \leqslant p$ avec égalité si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

Lemme 19. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \dots x_p)$ une famille de vecteurs de E. On a $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) \leqslant n$ avec égalité si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice de E.*

3.2 Méthodes algorithmiques de détermination

Proposition 20. *Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteur d'un espace vectoriel E. Toute opération élémentaire sur la famille préserve le rang. En particulier :*

— $\mathrm{rg}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \mathrm{rg}(e_2, e_1, \dots, e_n)$.
— $\mathrm{rg}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \mathrm{rg}(\lambda e_1, e_2, \dots, e_n)$ *pour tout scalaire λ* ***non nul****.*
— $\mathrm{rg}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \mathrm{rg}(e_1 + \mu e_j, e_2, \dots, e_n)$ *pour tout scalaire μ et tout indice $j \neq 1$.*

Corollaire 21. *Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteur d'un espace vectoriel E. Si $e_n \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$, alors $\mathrm{rg}(e_1, \dots, e_n) = \mathrm{rg}(e_1, \dots, e_{n-1})$.*

3.3 Cas des familles échelonnées sur une autre

Définition 22. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $n \in \mathbb{N}^*$et $(x_1, \dots x_n)$ une famille de E. Soit également une autre famille de cardinal n de E, notée $(y_1, \dots y_n)$. On dit que la famille $(y_1, \dots y_n)$ est *échelonnée* sur la famille $(x_1, \dots, x_n)$ s'il existe une famille de scalaires $(\lambda_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}$ vérifiant :

$$\begin{array}{llllll} y_1 & = \lambda_{1,1} x_1 & & & & \text{avec } \lambda_{1,1} \neq 0 \\ y_2 & = \lambda_{2,1} x_1 & + \quad \lambda_{2,2} x_2 & & & \text{avec } \lambda_{2,2} \neq 0 \\ \vdots & \quad \vdots & \quad \vdots & \ddots & & \quad \vdots \\ y_n & = \lambda_{n,1} x_1 & + \quad \lambda_{n,2} x_2 & + \quad \cdots & + \lambda_{n,n} x_n & \text{avec } \lambda_{n,n} \neq 0 \end{array} \tag{1}$$

Remarque 23. On prendra garde que cette notion, contrairement à toutes celles présentées dans ce chapitre, dépend de l'ordre des éléments dans les familles.

Proposition 24 (L'échelonnement préserve le vect)**.** *Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E échelonnée sur une autre famille $\mathcal{G}$. Alors,* $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$.

Corollaire 25. *L'échelonnement conserve les propriété de liberté de d'engendrement des familles. Autrement dit :*

i) Toute famille échelonnée sur une famille génératrice est génératrice.

ii) Toute famille échelonnée sur une famille libre est libre.

iii) Toute famille échelonnée sur une base est une base.