

Colles semaine 24

En bref

- Rang des applications linéaires :
 - Théorème du rang.
 - Miracle des endomorphismes **en dimension finie** : les endomorphismes injectifs sont exactement les endomorphismes surjectifs.
 - Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et f une application linéaire sur E , alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
 - Si f est une application linéaire entre E et F , alors $\text{rg}(f) \leq \min(\dim E, \dim F)$. Cas d'égalité.
 - Lien entre le rang et la composition.
 - Une application linéaire est entièrement caractérisée par ses images sur une base. Conséquence sur la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.
- Dénombrement élémentaire : nombre de permutations, d'arrangements, de sous-ensembles.
- Nombre de parties à k éléments d'un ensemble de cardinal n . Notation $\binom{n}{k}$ et formules classiques.
- Probabilité sur les univers finis :
 - Définition, vocabulaire : évènements, issues, probabilité des évènements.
 - Formule pour $\mathbb{P}(A \cup B)$ selon que A et B soit incompatible ou non.
 - Probabilité conditionnelle, formule de Bayes
 - Système complet d'évènements et formule des probabilités totales.
 - Formule des probabilités composées. Application à l'étude de processus aléatoires.
 - Notion d'évènement indépendants. Caractérisation par les probabilité conditionnelles.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- i) Montrer que $\text{rg}(u \circ w) \leq \text{rg}(u)$. Que dire si w est un isomorphisme ?
- ii) Montrer que $\text{rg}(u \circ w) \leq \text{rg}(w)$. Que dire si u est un isomorphisme ?
- iii) Montrer que si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de E et si f est linéaire injective, alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre.
- iv) Montrer que si f et g sont deux applications linéaires coïncidant sur une base, alors elles sont égales.
- v) Donner une preuve combinatoire de la formule du capitaine.
- vi) Montrer $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- vii) Montrer que l'application $A \mapsto \mathbb{P}_B(A)$ pour un évènement B fixé de probabilité non nulle est une probabilité.
- viii) Citer et démontrer la formule des probabilité totales.

Notes aux colleurs

- Pour les probabilités, on exigera un minimum de formalisme et on sanctionnera sévèrement toute erreur de « typage », telles des unions de probabilité, des sommes d'évènements ou autres inventions insensées.
- L'étude des variables aléatoires ne figure pas encore au programme de colle.

En détail

Rang des applications linéaires

Reprise du programme précédent

1 Dénombrement élémentaire

1.1 Un peu de théorie

Proposition-Définition 1. Soit E un ensemble. On dit que E est fini s'il existe un entier naturel n et une bijection entre E et $\llbracket 1; n \rrbracket$. De plus, dans ce cas, l'entier n est unique et s'appelle le cardinal de l'ensemble E . On le note $\text{Card}(E)$ ou $|E|$ ou encore $\#(E)$.

Lemme 2. Soit E et F deux ensembles. On suppose qu'il existe une bijection entre E et F . Alors E est fini si et seulement si F est fini et dans ce cas, les deux ensembles E et F ont même cardinal.

1.2 Ensembles construits à partir d'autres ensembles

Proposition 3 (Cardinal d'une union). Soit A et B deux ensembles finis. Alors l'union $A \cup B$ et l'intersection $A \cap B$ sont des ensembles finis. De plus :

- Si les ensembles A et B sont disjoints, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$;
alors $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.
- Dans le cas général, on a :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

Proposition 4 (Cardinal d'un produit d'ensemble). Soit A et B deux ensembles finis. Alors, le produit $A \times B$ est fini et $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Plus généralement, si l'on dispose de n ensembles finis $(A_1, \dots, A_n)$ (pour $n \in \mathbb{N}$). L'ensemble produit est encore fini et

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = \prod_{i=1}^n |A_i|$$

Proposition 5 (Cardinal de l'ensemble des applications). Soit E et F deux ensembles finis, alors l'ensemble F^E des applications de E dans F est également fini et $|F^E| = |F|^{|E|}$.

Remarque 6. C'est cette formule qui justifie la notation F^E pour l'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$. En outre, si l'on avait défini très rigoureusement la notion de fonction, on s'apercevrait que cette formule est cohérente avec la convention $0^0 = 1$

Proposition 7 (Cardinal de l'ensemble des parties). Soit E un ensemble. Alors son ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ est fini si et seulement si E est lui-même fini. Dans ce cas,

$$|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}.$$

Remarque 8. Si $E = \emptyset$, alors l'ensemble $\mathcal{P}(\emptyset)$ est le singleton $\{\emptyset\}$, qui est de cardinal 1. La formule précédente est donc cohérente avec la convention $2^0 = 1$.

1.3 Dénombrement élémentaire : permutations, liste et arrangements

Définition 9 (Permutations). Une permutation d'un ensemble E est une bijection de E dans lui-même. On note $\mathfrak{S}_E$ l'ensemble des permutations de E . Lorsque $E = \llbracket 1; n \rrbracket$, on note encore $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$.

Proposition 10 (Nombre de permutations). Soit E un ensemble, alors $\mathfrak{S}_E$ est fini si et seulement si E est fini. Dans ce cas, en notant $n = \text{Card}(E)$, on a $\text{Card}(\mathfrak{S}_E) = n!$.

Définition 11 (*p*-listes). Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble. On appelle *p*-liste de E , toute collection $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ d'éléments de E . En d'autres termes, une *p*-liste de E est un élément de E^p . Ou encore, une *p*-liste est une application de l'ensemble $\llbracket 1; p \rrbracket$ dans E .

Remarque 12. L'ordre des éléments dans une *p*-liste est important. En d'autres termes, la liste $(1, 2)$ et la liste $(2, 1)$ sont deux listes différentes.

Proposition 13 (Nombre de *p*-listes). *Si E est un ensemble fini de cardinal n , alors il existe n^p *p*-listes différentes de E*

Définition 14 (Arrangements). Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble. On appelle *p*-arrangements de E , toute collection ordonnée $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ d'éléments **distincts** de E . En d'autres termes, une *p*-liste est une injection de l'ensemble $\llbracket 1; p \rrbracket$ dans E .

Proposition 15 (Nombre d'arrangements). *Soit E un ensemble fini de cardinal n . On note alors $\mathcal{A}_n^p$ le nombre de *p*-arrangements de E . Ce nombre est fini et vaut :*

$$\mathcal{A}_n^p = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leq n \end{cases}.$$

1.4 Deux sagesses populaires pour terminer

Proposition 16 (Lemme des bergers). *Soit E et F deux ensembles. On suppose que E est fini et on note $n = \text{Card}(E)$. On suppose de plus qu'il existe un entier naturel non nul p et une fonction f de E dans F telle que chaque élément de F admette exactement p antécédent par f .*

Alors l'ensemble F est fini également et $\text{Card}(F) = \frac{n}{p}$.

Remarque 17. On remarquera que les hypothèses du théorème impliquent que la fonction f est surjective et que le cardinal de E est un multiple à la fois de p et du cardinal de F .

1.4.1 Application : Les coefficients binomiaux

Application 18 (Coefficients binomiaux). On rappelle que, pour deux entiers naturels n et p , on désigne par $\binom{n}{p}$ le nombre de sous-ensembles de $\llbracket 1; n \rrbracket$ qui sont de cardinal p . On peut alors affirmer que :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times p} = \frac{n!}{(n-p)!p!} & \text{si } p \leq n \end{cases}.$$

Proposition 19 (Propriétés des coefficients binomiaux.). *Soit n et k deux entiers naturels et $k \leq n$. Nous pouvons établir les identités suivantes :*

- i) $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{0} = 1; \binom{n}{n} = 1; \binom{n}{1} = n; \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$
- ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- iii) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ (formule de pascal)
- iv) Si $k, n \geq 1$, alors $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$. (formule du capitaine)
- v) Si p est un autre entier naturel et $n \geq k \geq p$, alors $\binom{k}{p} \binom{n}{k} = \binom{n}{p} \binom{n-p}{k-p}.$
- vi) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$

1.4.2 Le principe des tiroirs

Lemme 20 (Principe des tiroirs). *Si l'on doit ranger n chaussettes dans p tiroirs (où n et p sont deux entiers naturels) et qu'il y a strictement plus de chaussettes que de tiroirs ($n > p$), alors il existe au moins un tiroir qui contient strictement plus qu'une chaussette.*

2 Terminologie sur les univers de probabilité

2.1 Définitions

Définition 21 (Probabilité sur un ensemble fini). Soit Ω un ensemble fini (que l'on appellera *univers* dans la théorie de probabilités). On appelle probabilité sur Ω une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les trois axiomes suivants :

- i) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) \in [0; 1]$.
- ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- iii) $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2, (A \cap B = \emptyset) \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

2.2 Modélisation d'une expérience aléatoire

En probabilité, il est courant que l'énoncé introduise une expérience aléatoire par sa description en français. C'est alors à vous que revient la tâche de modélisation. C'est-à-dire que vous devez proposer un espace de probabilité qui rend compte de cette expérience.

Définition 22 (Espaces probabilisés). On appelle **espace probabilisé fini** la donnée d'un triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ où :

- Ω est un ensemble fini appelé **univers**.
- $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω , les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$, c'est-à-dire les sous-ensembles de Ω sont appelés les **événements**.
- $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω .

Remarque 23. La donnée de $\mathcal{P}(\Omega)$ semble inutile, elle sera justifiée ultérieurement lorsque l'on s'autorisera à considérer des probabilités sur des espaces infini. Dans ce cas, on peut remplacer $\mathcal{P}(\Omega)$ par un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant certaines conditions.

2.3 Calcul des probabilités

2.3.1 Formules élémentaires

Lemme 24 (Probabilité d'une union finie disjointe). Soit Ω un univers fini, n un entier naturel non nul et $(A_1, \dots, A_n)$ une famille de sous-ensembles de Ω deux à deux disjoints. Alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k).$$

Lemme 25 (Probabilité du vide). $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Proposition 26 (Croissance de l'application probabilité). Pour tout couple d'événements (A, B) , $(A \subset B) \Rightarrow (\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B))$.

Corollaire 27. Pour vérifier qu'une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ est une probabilité, il suffit de vérifier les trois axiomes :

- i) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) \geq 0$.
- ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- iii) $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2, (A \cap B = \emptyset) \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

On n'a donc pas besoin de vérifier que $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) \leq 1$.

Lemme 28 (Probabilité et complémentaire). Pour tout événement $A : \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$; $\bar{A}$ désignant le complémentaire de A .

Plus généralement, pour tous événements A et $B : \mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Proposition 29 (Probabilité d'une union dans le cas général). Pour tous événements A et $B : \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Lemme 30 (Sur un univers fini, une probabilité est caractérisé par ses valeurs sur les issues). Soit $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$ un univers fini ainsi que $\{p_1, \dots, p_n\}$ une famille de réels positifs vérifiant $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Alors, il existe une et une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω vérifiant $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}(x_i) = p_i$.

2.3.2 Une dernière formule très utile

Définition 31 (Système complet d'évènements). Soit Ω un univers fini. On appelle **système complet d'évènements** de Ω toute famille $(A_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) telle que

- $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i = \Omega$.

Remarque 32. Soit Ω un univers fini.

- i) Pour tout évènement A , la famille $(A, \bar{A})$ est un système complet d'évènements de Ω .
- ii) La famille $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$, formée des évènements élémentaires, est un système complet d'évènements de Ω .

Théorème 33 (Formule des probabilités totales (Version classique)). Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ un système complet d'évènements. Pour tout évènement B , on a

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

Application 34 (Calcul à partir des probabilités élémentaires). On note $n = \text{Card}(\Omega)$ et $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Si on connaît la probabilité de chaque évènement élémentaire $\mathbb{P}(\{\omega_i\})$, alors, on peut calculer la probabilité de chaque évènement :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}).$$

3 Probabilité conditionnelles

3.1 Définition

Définition 35 (Probabilité conditionnelle). Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient A un évènement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et B un autre évènement. La **probabilité conditionnelle de B sachant A** est définie par

$$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Proposition 36. Avec les notations précédentes, l'application $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur Ω .

3.2 Formules de Bayes

Proposition 37 (Formule de Bayes (version simplifiée)). Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Pour tous évènements A et B de probabilité non nulle, on a

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Théorème 38 (Formule des probabilités totale (version conditionnelle)). Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ un système complet d'évènements tel que, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}(A_i) \neq 0$. Pour tout évènement B , on a

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B).$$

Théorème 39 (Formule de Bayes générale). Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ un système complet d'évènements ayant tous une probabilité non nulle. Pour tout évènement B de probabilité non nulle, on a, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}_{A_j}(B)\mathbb{P}(A_j)}$$

Théorème 40 (Formule des probabilités composées). Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ une famille d'évènements telle que, pour tout $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^i A_k\right) \neq 0$. Alors,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_{\bigcap_{k=1}^{i-1} A_k}(A_i)$$

4 Indépendance d'évènements

4.0.1 Indépendance de deux évènements

Définition 41. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Deux évènements A et B de Ω sont dits indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Proposition 42 (Indépendance, version conditionnelle). Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit A et B deux évènements de Ω , chacun de probabilité non nulle. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- i) A et B sont indépendants,
- ii) $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$,
- iii) $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.

Remarque 43. La notion d'indépendance dépend en fait de la probabilité. Ainsi deux évènements d'un univers peuvent être indépendants selon une probabilité mais non indépendants selon une autre probabilité.

Lemme 44. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit A et B deux évènements de Ω . Si A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$ sont indépendants ; de même que $\bar{A}$ et B .

4.0.2 Indépendance d'une famille d'évènements

Définition 45. Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ une famille d'évènements.

- On dit que les évènements (A_i) sont **deux à deux indépendants** si, pour tout $i \neq j$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket$, A_i et A_j sont indépendants.
- On dit que les évènements (A_i) sont **mutuellement indépendants** si, pour toute partie I de $\llbracket 1; n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Attention ! Ces deux notions ne coïncident pas.

- i) Si une famille est mutuellement indépendante, alors elle est deux à deux indépendante. Mais la réciproque est fautive.
- ii) L'indépendance mutuelle de n évènements ne dépend pas de l'ordre de ces évènements. C'est une notion très forte qui nécessite de vérifier 2^n égalités. Il est rare que l'on ait à les vérifier directement. Soit l'indépendance des évènements fait partie des hypothèses ; elle modélise des expériences aléatoires aux résultats indépendants. Soit elle est la conséquence de l'indépendance, notamment, d'autres évènements.

Proposition 46. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'évènements et $K \subset \llbracket 1; n \rrbracket$. On définit une nouvelle famille (B_i) en posant $B_i = \overline{A_i}$ si $i \in K$ et $B_i = A_i$ sinon. Autrement dit, on construit une nouvelle famille en remplaçant un nombre au choix d'évènements A_i par leur complémentaire.*

- i) Si la famille $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est deux à deux indépendantes, alors, $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ l'est aussi.*
- ii) Si la famille $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est mutuellement indépendante, alors, $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ l'est aussi.*