Colles semaine 25

En bref

- Dénombrement élémentaire : nombre de permutations, d'arrangements , de sous-ensembles.
- Nombre de parties à k éléments d'un ensemble de cardinal n. Notation $\binom{n}{k}$ et formules classiques.
- Probabilité sur les univers finis :
  - Définition, vocabulaire : évènements, issues, probabilité des évènements.
  - Formule pour $\mathbb{P}(A \cup B)$ selon que A et B sont incompatibles ou non.
  - Probabilité conditionnelle, formule de Bayes
  - Système complet d'évènements et formule des probabilités totales.
  - Formule des probabilités composées. Application à l'étude de processus aléatoires.
  - Notion d'évènement indépendants. Caractérisation par les probabilité conditionnelles.
- Variables aléatoires :
  - Définition, sommes, produit, etc.
  - Loi des variables aléatoires (sur les univers finis).
  - Lois usuelles : uniformes, de Bernoulli et binomiale.
  - Espérance et variance. Calcul pour les lois usuelles. Linéarité de l'espérance.
  - Première introduction à l'indépendance des variables aléatoires.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

i) Donner une preuve combinatoire de la formule du capitaine.

ii) Montrer $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

iii) Montrer que l'application $A \mapsto \mathbb{P}_B(A)$ pour un évènement B fixé de probabilité non nulle est une probabilité.

iv) Citer et démontrer la formule des probabilité totales.

v) Définir la variance et montrer que $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$.

vi) Définir la loi uniforme (ou de Bernoulli ou binomiale). Faire le calcul explicite de l'espérance et de la variance associée.

Notes aux colleurs

- Pour l'instant tous les résultats liés à l'indépendance des variables aléatoires sont admis. Il y aura plus tard un chapitre spécifique sur l'indépendance. Pour l'instant, il s'agit surtout d'un outil facilitant le calcul des espérances et variances lorsque l'indépendance le permet.
- En conséquence du point précédent, étudier la loi du minimum (ou maximum) de deux variables indépendantes n'est pas un objectif de cette semaine.

En détail

1 Dénombrement élémentaire

Reprise du programme précédent

2 Terminologie sur les univers de probabilité

Reprise du programme précédent

3 Probabilité conditionnelles

Reprise du programme précédent

4 Indépendance d'évènements

Reprise du programme précédent

5 Variables aléatoires

5.1 Définitions et opérations

Définition 1. Soient Ω l'univers fini d'une expérience aléatoire et E un ensemble.
Une **variable aléatoire**, notée X, sur Ω à valeurs dans E est une application $X : \Omega \to E$.
Si $E = \mathbb{R}$, alors on dit que X est une **variable aléatoire réelle** (souvent abrégé en var).

Remarque 2. Pour un univers fini, toute application est une variable aléatoire. Lorsque l'on généralisera aux univers infini, on imposera certaines contraintes pour l'application X.

Définition 3 (Indicatrice d'un évènement)**.** Soit A un évènement de l'univers fini Ω. L'application

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

est appelée **variable aléatoire indicatrice de $\boldsymbol{A}$** et est notée $\mathbb{1}_A$.

Définition 4. Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. L'ensemble image de X, noté $X(\Omega)$ est l'ensemble des éléments de E qui ont au moins un antécédent par X.

$$X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\}$$

Autrement dit, $X(\Omega)$ est l'image directe de Ω par la fonction X.

Notation 5. Soit X une variable aléatoire réelle et $x \in \mathbb{R}$.
- On note $[X = x]$ l'évènement $X^{-1}(\{x\})$. Autrement dit $[X = x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$.
- De manière analogue, on note $[X \leqslant x]$ l'évènement $X^{-1}(]-\infty\,; x])$. Autrement dit $[X = x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\}$.
- Le lecteur généralisera comme un grand ce qui précède pour définir les notations $[X < x]$, $[X \geqslant x]$ et $[X > x]$.

Proposition 6. *Si X est une variable aléatoire, alors la famille d'évènements $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ forme un système complet d'évènements. On l'appelle parfois* système complet associé à la variable X.

Proposition 7. *Soit Ω un univers de probabilité. L'ensemble des variables aléatoires réelles sur Ω forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

5.2 Lois de variables

Définition 8. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. On définit **la loi de X** comme étant la donnée de deux éléments :

$$\begin{aligned} P_X : \mathbb{X}(\nleq) &\to [0,1] \\ x &\mapsto \mathbb{P}(X = x) \end{aligned}$$

Attention ! Cette définition ne se généralisera pas telle quelle aux cas des univers infinis.

Remarque 9. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x \notin X(\Omega)$, alors, $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

Méthode 10 (Détermination de la loi d'une variable aléatoire)**.** Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire, il faut successivement

1) déterminer $X(\Omega)$;
2) pour chaque valeur $x \in X(\Omega)$, déterminer $\mathbb{P}(X = x)$;

Remarque 11. On a toujours

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$$

Lorsque l'on a fini de déterminer une loi de probabilité, il est prudent de vérifier que cette propriété est bien vérifiée.
Dans le cas où l'une des valeurs $\mathbb{P}(X = x)$ est plus difficile à calculer que les autres, on peut aussi penser à utiliser cette propriété.

Proposition 12. *Soient E et F deux ensembles, $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini et $f : E \to F$ une fonction telle que $X(\Omega) \subset \mathcal{D}_f$. On considère $Y = f(X)$ la variable aléatoire image de X par f.*
Alors $Y(\Omega)$ est l'image directe de l'ensemble $X(\Omega)$ par la fonction Y. De plus, pour tout élément $y \in Y(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{\{x \in X(\Omega) /\ f(x) = y\}} \mathbb{P}(X = x)$$

5.3 Espérance, variance, moment

5.3.1 Définitions et propriétés de l'espérance

Définition 13. Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle définie sur Ω. On appelle **espérance** de X, et on note $\mathbb{E}(X)$, le nombre réel défini par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x)$$

Lemme 14. *Soit A un évènement de Ω. Alors, $\mathbb{E}(1_A) = \mathbb{P}(A)$.*

Lemme 15. *Soient* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini et* X *une variable aléatoire sur* Ω*. Alors,*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}\left(\{\omega\}\right) X(\omega)$$

Proposition 16 (Linéarité de l'espérance)**.** *L'application, qui, à une variable aléatoire réelle, associe son espérance possède des propriétés de linéarité. Ainsi, pour toutes variables aléatoires réelles* X *et* Y *définies sur* Ω *et tout* λ *réel, on a*

i) $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

ii) $\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X)$.

iii) Plus généralement, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \mathbb{E}\left(\alpha X + \beta Y\right) = \alpha \mathbb{E}\left(X\right) + \beta \mathbb{E}\left(Y\right)$.

Corollaire 17. *Soit* X *une variable aléatoire réelle sur un univers de probabilité* Ω *et* α *et* β *deux réels. On pose* $Z = \alpha X + \beta$ *qui est bien une variable aléatoire. Alors* $\mathbb{E}\left(Z\right) = \alpha \mathbb{E}\left(X\right) + \beta$.

Proposition 18 (Positivité de l'espérance)**.** *Soit* X *une variable aléatoire réelle* ***positive ou nulle*** *sur un espace probabilisé fini* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$*. Alors,*

i) $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$ *;*

ii) $\mathbb{E}(X) = 0$ *si, et seulement si,* $\mathbb{P}(X = 0) = 1$ *; on dit dans ce cas que la variable aléatoire* X *est* ***presque-sûrement nulle****.*

Corollaire 19 (Croissance de l'espérance)**.** *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé fini* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$*. Alors,*
si $X \leqslant Y$ *(c'est-à-dire que pour toute issue* ω *de* Ω*,* $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$*), alors,* $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$*.*

5.3.2 Théorème de transfert

Théorème 20 (Théorème de transfert)**.** *Soit* X *une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$*. Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction définie au moins sur* $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ *de sorte que la variable aléatoire* $f(X)$ *existe. Alors,*

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \mathbb{P}(X = x_i)$$

5.3.3 Variance et moment d'ordre supérieur

Définition 21. Soit X une var sur un espace probabilisé fini. On appelle **variance** de X, et on note $\mathbb{V}(X)$, le nombre défini par

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} \left(x - \mathbb{E}(X)\right)^2 \mathbb{P}(X = x)$$

Proposition-Définition 22. *Pour toute variable aléatoire réelle* X *sur un espace probabilisé fini, on a*

$$\mathbb{V}(X) \geqslant 0$$

On appelle ***écart-type*** *de* X*, et on note* $\sigma(X)$*, le nombre défini par*

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Proposition 23 (Calcul pratique de variance)**.** *Pour toute variable aléatoire* X *sur un espace probabilisé fini, on a*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

Cette formule porte parfois le nom de Formule de König-Huygens.

Proposition 24. *Pour toute variable aléatoire réelle finie X, on a $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$. De plus, $\mathbb{V}(X) = 0$ si, et seulement si, X est presque sûrement constante, c'est-à-dire qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = m) = 1$.*

Proposition 25. *Soient a et b deux réels et X une variable aléatoire réelle finie. Alors,*

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$$

Définition 26. Une var X telle que $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = 1$ est dite **centrée réduite**.

Définition 27 (Moments)**.** Soient X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Le **moment d'ordre k** de X, noté $\mathbb{M}_k(X)$, est défini par

$$\mathbb{M}_k(X) = \mathbb{E}(X^k)$$

Remarque 28. On a pour X une variable aléatoire réelle : $\mathbb{E}(X) = \mathbb{M}_1(X)$ et
$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{M}_2(X) - (\mathbb{M}_1(X))^2 = \mathbb{M}_2(X - \mathbb{E}(X))$.

Proposition 29 (Application du théorème de transfert)**.** *Soient X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On a*

$$\mathbb{M}_k(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^k \mathbb{P}(X = x)$$

5.4 Lois usuelles

5.4.1 Lois constantes

Définition 30. Une variable aléatoire X est dite presque-sûrement constante s'il existe une valeur a telle que $\mathbb{P}(X = a) = 1$.

Proposition 31. *Si X est une variable aléatoire réelle presque sûrement constante égale à a, alors $\mathbb{E}(X) = a$ et $\mathrm{Var}(X) = 0$.*

5.4.2 Lois uniformes

Définition 32. Soient X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini et a et b deux entiers relatifs. On dit que X suit une **loi uniforme** sur $[\![a\,;\,b]\!]$ et l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a\,;\,b]\!])$ si

$$X(\Omega) = [\![a\,;\,b]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![a\,;\,b]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{b - a + 1}$$

Proposition 33 (Cas simple)**.** *Soit X une var définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0\,;\,n]\!])$. Alors,*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n}{2} \qquad \textit{et} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{n(n+2)}{12}.$$

Proposition 34. *Soit X une var définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a \leqslant b$. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a\,;\,b]\!])$. Alors,*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} = \textit{et} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}.$$

Remarque 35. Soit a et b deux entiers avec $a \leqslant b$. Si X est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![0\,;\,b - a]\!]$, alors la variable aléatoire $Y := X + a$ suit loi uniforme sur $[\![a\,;\,b]\!]$.

5.4.3 Lois de Bernoulli

Définition 36. Soit $p \in [0\,;\,1]$. On dit que X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p et l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et si :

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{(et donc)} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$$

Proposition 37. *Soit $p \in [0\,;\,1]$. On suppose que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Alors, $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$.*

5.4.4 Lois binomiales

Définition 38. Soit $p \in [0\,;\,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p et l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ si $X(\Omega) = [\![0\,;\,n]\!]$ et si :

$$\forall k \in [\![0\,;\,n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Proposition 39. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0\,;\,1]$. On suppose que X suit une loi binomiale de paramètres n et p. Alors, $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.*

5.5 Indépendance de variables aléatoire : une introduction sommaire

Définition 40 (Variables aléatoires indépendantes)**.** Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On dit que les variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si, pour toute partie A de $\mathbb{R}$ et toute partie B de $\mathbb{R}$ les évènements $[X \in A]$ et $[Y \in B]$ sont indépendants, c'est-à-dire vérifient

$$\mathbb{P}([X \in A] \cap [Y \in B]) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$$

Proposition 41. *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé **fini** $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Alors, X et Y sont indépendantes si, et seulement si, pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$ les évènements $[X = x]$ et $[Y = y]$ sont indépendants, c'est-à-dire vérifient*

$$\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([X = x])\mathbb{P}([Y = y])$$

Lemme 42. *Soit A et B deux évènements. Alors les variables aléatoires indicatrices $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ sont indépendantes si et seulement si les évènements A et B le sont.*

Proposition 43 (Lemme des coalitions (pour deux variables))**.** *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes réelles définies sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et f et g deux fonctions à valeurs réelles dont les domaines de définition contiennent respectivement $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$. Alors, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.*

Proposition 44 (Lemme des coalitions (pour une famille de variables))**.** *Soit $(X_1, \ldots, X_p, X_{p+1}, \ldots, X_{p+q})$ une famille de variables aléatoires réelles mutuellement indépendante sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et f et g deux fonctions à valeurs réelles respectivement définies sur $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ Alors, les variables aléatoires $f(X_1, \ldots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \ldots, X_{p+q})$ sont indépendantes.*

Application 45 (Une somme de Bernoulli identiques et indépendantes suit une loi binomiale)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $p \in [0\,;\,1]$ et $(X_1, \ldots X_n)$ une famille de variables aléatoires réelles **mutuellement indépendante** suivant chacune la loi de Bernoulli de paramètre p. Alors la somme $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$ est une variable aléatoire réelle suivant la loi binomiale de paramètres n et p.

Proposition 46. *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles* ***indépendantes*** *définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Alors,*

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Corollaire 47. *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles* ***indépendantes*** *définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Alors,*

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}\, V(Y)$$