Colles semaine 27

En bref

- Représentation matricielle en dimension finie :
  - Matrices d'un (ou une famille de) vecteurs dans une base.
  - Matrice de changement de bases. Formule de changement de base pour les coordonnées.
  - Matrice d'une application linéaire dans des bases fixées.
  - Formules de changement de bases pour les matrices d'application linéaires. Compatibilité entre le produit matriciel et la composition d'application linéaire.
  - Rang d'une matrice : c'est le rang de n'importe quelle application linéaire représenté par cette matrice.
- Polynômes de matrice et polynôme d'endomorphisme : compatibilité du produit de polynôme avec le produit matriciel (ou avec la composition d'endomorphisme).
- Utilité de disposer d'un polynôme annulateur pour étudier l'inversibilité d'une matrice.
- Utilité des polynômes annulateurs pour calculer des puissances d'une matrice : avec division euclidienne de X^p, ou bien (si le polynôme annulateur est de degré 2) par étude de suite récurrente linéaire.
- Homothétie et projections vectorielles : définition, caractérisation par polynôme annulateur, interprétation géométrique.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

i) Montrer que les matrices de changement de bases sont inversibles et que $(P_{\mathcal{B},\mathcal{C}})^{-1} = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.

ii) Montrer que $\mathrm{Mat}(u \circ w) = \mathrm{Mat}(u)\,\mathrm{Mat}(w)$ en précisant dans quelles bases les matrices sont déterminées pour rendre la formule correcte.

iii) Montrer la formule $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

iv) Définir la projection sur F parallèlement à G.

v) Montrer que si p est la projection sur F parallèlement à G, alors $F = \mathrm{Im}\,p$ et $G = \mathrm{Ker}\,p$.

vi) Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((1, 0, 2))$; donner une expression de la projection sur F parallèlement à G. *On pourra évidement varier les exemples à condition que les calculs restent simples.*

Notes aux colleurs

- La notation relative aux matrices d'applications linéaires n'est pas fixée par le programme. On n'hésitera pas à redemander des définitions précises aux étudiants en cas d'ambiguïtés sur la notation. J'ai essayé de choisir les notations dans lesquelles les formules sont le plus simples à retenir.
- Un étudiant qui ne connaitrait pas la définition des projections vectorielles sera exclus de colle ! Ceci afin de lui donner l'occasion de sortir observer son ombre sur le sol et de comprendre en quoi la notion de projection est accessible aux enfants de 5 ans.

En détail

Étude systématique des applications linéaires en dimension finie

Reprise du programme précédent.

Nouveautés de la semaine

1 Polynômes, matrices carrées et endomorphismes

1.1 Rappels

On a déjà plus ou moins vu la notion de polynômes de matrices carrées. Par exemple, si $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est un polynôme et A une matrice carrée, on définit $P(A)$ comme la matrice $P(A) := \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$. Suivant le principe général qui sous-tend ce chapitre, nous allons maintenant définir les polynômes d'endomorphismes.

Attention ! Écrire $P(A)$ lorsque A n'est pas une matrice carrée n'a aucun sens.

Définition 1 (Puissances d'endomorphismes)**.** Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E (qui peut être de dimension infinie). On note :

$$\begin{aligned} f^2 &= f \circ f \\ f^3 &= f \circ f \circ f \\ &\vdots \\ f^n &= \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}. \end{aligned}$$

Pour les férus de formalisme, on donne une définition par récurrence :

$$\begin{cases} f^0 = \mathrm{Id}_E \\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{n+1} = f \circ f^n \end{cases}$$

1.2 Généralisations naturelles

Définition 2 (Polynômes d'endomorphisme)**.** Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie et soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme. Alors on note $P(f)$ l'endomorphisme $P(f) := \sum_{k=0}^{n} a_k f^k$.

Proposition 3 (Quelques propriétés de bases)**.** *Soit f une endomorphisme d'un espace vectoriel E et P et Q deux polynômes, ainsi que $\lambda \in R$ un scalaire. Alors :*

i) $(P+Q)(f) = P(f) + Q(f)$.

ii) $(\lambda P)(f) = \lambda(P(f))$.

iii) Si $P = a_0$ est de degré zéro, alors $P(f) = a_0 \mathrm{Id}_E$.

iv) Si $P : x \mapsto ax$ est de degré au plus 1, alors $P(f) = af$.

Remarque 4. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Alors l'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x] & \to & \mathcal{L}(E) \\ P & \mapsto & P(f) \end{array}$ est une application linéaire.

Proposition 5. *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E et P et Q deux polynômes. Alors $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$.*

Corollaire 6. *Soit f une endomorphisme d'un espace vectoriel E et P et Q deux polynômes. Alors les endomorphismes $P(f)$ et $Q(f)$ commutent, c'est-à-dire $P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$.*

Lemme 7. *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E et P un polynôme. Soit également $\mathcal{B}$ une base de E et $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors la matrice de l'endomorphisme $P(f)$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice $P(M)$.*

Attention ! Le lemme n'est pas valable si on prend des bases d'arrivée et de départ différentes, c'est-à-dire si on s'intéresse à des matrices de types $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$.

1.3 Notion de polynôme annulateur

Définition 8 (Polynômes annulateur)**.** Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E (respectivement M une matrice carrée) et P un polynôme. On dit que P est un polynôme annulateur de f (respectivement annulateur de M) si l'endomorphisme $P(f)$ est égal à l'endomorphisme nul (respectivement si la matrice $P(M)$ est égal à la matrice nulle).

Remarque 9. Pour un endomorphisme f donnée, les polynômes annulateurs de f sont exactement les éléments du noyau de l'application Φ de la remarque 4. En particulier, l'ensemble des polynômes annulateurs d'un endomorphisme f fixé est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Lemme 10. *Soit f une endomorphisme d'un espace vectoriel E et P un polynôme. Soit également $\mathcal{B}$ une base de E et M la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$. Alors P est annulateur de f si et seulement si il est annulateur de M.*

Lemme 11. *Soit f une endomorphisme d'un espace vectoriel E et P polynôme annulateur de f. Alors tout multiple de P est encore annulateur de f.*

À ce stade, il devient nécessaire de se poser la question de l'existence d'un polynôme annulateur[1] pour n'importe quel endomorphisme.

Théorème 12. *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n (respectivement une matrice M carrée de taille n). Alors il existe une polynôme non nul annulateur de f (respectivement annulateur de M) dans $\mathbb{K}_{n^2}[x]$.*

Indication de démonstration : Montrer qu'une certaine famille d'un espace vectoriel de dimension n^2 est liée.

Remarque 13. En fait, on peut montrer qu'il existe nécessairement un polynôme annulateur de degré au plus n. Mais la preuve de cette version raffinée nous est pour l'instant inaccessible.

Attention ! Dans un espace de dimension infinie, certains endomorphismes n'admettent aucun polynôme annulateur non nul

1. autre que le polynôme nul, bien sûr, qui est annulateur de tout endomorphisme.

1.4 Applications des polynômes annulateurs

Les méthodes listées ici doivent toujours refaire l'objet de preuves. Il ne s'agit pas de résultats explicitement au programme. En pratique, on se laisse guider par l'énoncé.

1.4.1 Pour l'inversibilité

Méthode 14 (Inversion avec un polynôme annulateur)**.** Soit M une matrice carré de taille n et $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ un polynôme annulateur de M. Si $a_0 \neq 0$, alors la matrice M est inversible et dans ce cas :

$$M^{-1} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} a_k M^{k-1}$$

1.4.2 Pour le calcul de puissance de matrices ou d'endomorphismes

Méthode 15. Soit M une matrice carrée et P un polynôme annulateur de M. Soit également $n \in \mathbb{N}^*$. Si l'on suppose que la division euclidienne de X^n par P s'écrit $\forall x \in \mathbb{R}, X^n = QP + R$, alors

$$M^n = R(M)$$

Remarque 16. Si n est inférieur au degré de P, la méthode est inutile.

Méthode 17. Soit M une matrice carré de taille p admettant un polynôme annulateur de degré 2. C'est-à-dire que l'on dispose de (a, b, c) trois coefficients (avec $a \neq 0$) tels que $aM^2 + bM + cI_p = 0_p$. Alors, on montre par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n \in \mathrm{Vect}(M, I_p)$$

Par ailleurs, la récurrence permet de déterminer explicitement les coefficients de la combinaison linéaire grâce à deux suites vérifiant un système d'équations de récurrences couplé. Ces équation peuvent se découpler en une unique équation de récurrence linéaire d'ordre 2. À partir de là on sait résoudre. (Et on remarquera que le polynôme caractéristique de l'équation de récurrence est exactement le polynôme annulateur de M).

1.4.3 Rappels concernant d'autres méthodes de calcul de puissance matricielle

Méthode 18. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. On suppose que l'on sait trouver une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et une famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de scalaires vérifiant :

$$\forall i \in [\![1\,;\,n]\!],\ f(e_i) = \alpha_i e_i$$

Alors on peut écrire pour tout vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ et pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$f^p(x) = (f)^p \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\alpha_i\right)^p e_i.$$

Remarque 19. Une telle base $(e_1, \ldots, e_n)$ est appelée une *base de diagonalisation* de f. Il n'est pas toujours possible d'en trouver une. Le cours de deuxième année insistera sur les manières d'en trouver explicitement. Mais en première année, on doit vous guider dans cette démarche.

Méthode 20. Soit M une matrice carrée. Si l'on parvient à écrire une décomposition $M = A+B$ où A et B sont deux matrices $\boxed{\text{vérifiant } AB = BA}$ et dont on sait calculer les puissances ; alors on peut calculer les puissances de M grâce à la formule du binôme.

Attention ! L'hypothèse de commutation $AB = BA$ est cruciale et doit être explicitement vérifiée pour appliquer le binôme.

Remarque 21. Très fréquemment on cherche une décomposition où $A = \lambda I_p$ pour un certain scalaire λ. Cela a l'avantage de vérifier automatiquement l'hypothèse de commutation.

2 Quelques endomorphisme remarquables

2.1 Homothétie

Définition 22. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. On appelle homothétie de rapport λ, l'endomorphisme :

$$h_\lambda : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array}. \tag{1}$$

Proposition 23. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension non nulle et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. Alors, l'homothétie h_λ est injective si et seulement si elle est surjective ; si et seulement si elle est bijective ; si et seulement si $\lambda \neq 0$ et dans ce cas $(h_\lambda)^{-1} = h_{\lambda^{-1}}$.*

Proposition 24. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, λ un scalaire et h_λ l'homothétie de rapport λ. Soit enfin $\mathcal{B}$ une base de E. Alors la matrice de h_λ dans cette base s'écrit :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h_\lambda) = \lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Remarque 25. La matrice d'une homothétie est donc identique quelle que soit la base considérée. On peut montrer que les homothéties sont les seuls endomorphismes présentant cette particularité.

Lemme 26. *Un endomorphisme u d'un espace vectoriel E est une homothétie si et seulement si il admet un polynôme annulateur de degré* 1.

2.2 Projections vectorielles

Proposition-Définition 27 (Projections vectorielles)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Alors pour tout vecteur $x \in E$, on dispose d'un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ vérifiant $x = x_F + x_G$. Alors il existe un unique endomorphisme p de E vérifiant*

$$\forall x_F \in F,\ \forall x_G \in G,\ p(x_F + x_G) = x_F$$

Cet endomorphisme s'appelle la projection sur F parallèlement à G.

Attention ! Cette définition n'a aucun sens si F et G ne sont pas supplémentaires. Le lecteur est invité à comprendre que la propriété de somme directe implique l'existence de l'endomorphisme en question et que la propriété $F + G = E$ implique l'unicité de cet endomorphisme.

Proposition 28. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Soit p la projection sur F parallèlement à G. On note $r = \dim(F)$ et $n = \dim(E)$ de sorte que $\dim(G) = n - r$ et on se donne également une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E adaptée à la somme directe $F \oplus G = E$. On rappelle au lecteur que ceci veut dire que $(e_1, \dots, e_r)$ constitue une base de F et que $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ constitue une base de G. Alors la matrice de p dans cette base s'écrit ainsi (elle admet une écriture diagonale par blocs) :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{array}{c} \\ L_1 \longleftarrow \\ \vdots \\ L_r \longleftarrow \\ L_{r+1} \longleftarrow \\ \vdots \\ L_n \longleftarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} C_1 & \dots & C_r & C_{r+1} & \dots & C_n \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \dots & (0) & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ (0) & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$$

Attention ! Si la base de la proposition précédente n'est pas adaptée à la somme directe $F \oplus G = E$, alors on ne sait rien dire sur la matrice de p dans cette base.

Proposition 29 (Noyau et images des projections)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Soit p la projection sur F parallèlement à G. Alors on a :*

$$F = \operatorname{Im} p$$
$$G = \operatorname{Ker} p$$

Lemme 30. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Notons p_F la projection sur F parallèlement à G et p_G la projection sur G parallèlement à F.*
Alors $p_F + p_G = \mathrm{Id}_E$. De plus, $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Donnons maintenant un critère très simple qui permet de vérifier qu'un endomorphisme est ou non une projection :

Théorème 31. *Soit E un espace vectoriel et p un endomorphisme de E. Alors p est une projection si et seulement si $p \circ p = p$.*

2.3 Symétries vectorielles

À suivre...