

Colles semaine 28

En bref

- Polynômes de matrice et polynôme d'endomorphisme : compatibilité du produit de polynôme avec le produit matriciel (ou avec la composition d'endomorphisme).
- Utilité de disposer d'un polynôme annulateur pour étudier l'inversibilité d'une matrice.
- Utilité des polynômes annulateurs pour calculer des puissances d'une matrice : avec division euclidienne de X^p , ou bien (si le polynôme annulateur est de degré 2) par étude de suite récurrente linéaire.
- Homothétie et projections vectorielles : définition, caractérisation par polynôme annulateur, interprétation géométrique.
- Symétries vectorielles : définition, caractérisation par polynôme annulateur, interprétation géométrique. Lien entre une symétrie et sa projection associée.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Définir la projection sur F parallèlement à G .
- Montrer que si p est la projection sur F parallèlement à G , alors $F = \text{Im } p$ et $G = \text{Ker } p$.
- Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 0, 2))$; donner une expression de la projection sur F parallèlement à G . *On pourra évidemment varier les exemples à condition que les calculs restent simples.*
- Adapter les questions précédents pour les symétries.
- Si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G et p la projection sur F parallèlement à G ; établir la relation $s = 2p - \text{Id}_E$. En déduire que s et p commutent.

Notes aux colleurs

- La notation relative aux matrices d'applications linéaires n'est pas fixée par le programme. On n'hésitera pas à redemander des définitions précises aux étudiants en cas d'ambiguïtés sur la notation. J'ai essayé de choisir les notations dans lesquelles les formules sont le plus simples à retenir.
- Un étudiant qui ne connaîtrait pas la définition des projections ou symétries vectorielles sera exclus de colle ! Ceci afin de lui donner l'occasion de sortir observer son ombre sur le sol et de comprendre en quoi la notion de projection est accessible aux enfants de 5 ans.

En détail

1 Polynômes, matrices carrées et endomorphismes

Reprise du programme précédent

2 Quelques endomorphismes remarquables

2.1 Homothétie

Reprise du programme précédent

2.2 Projections vectorielles

Reprise du programme précédent

2.3 Symétries vectorielles

Proposition-Définition 1 (Symétrie vectorielles). *Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . Alors pour tout vecteur $x \in E$, on dispose d'un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ vérifiant $x = x_F + x_G$. Alors il existe un unique endomorphisme s de E vérifiant*

$$\forall x_F \in F, \forall x_G \in G, s(x_F + x_G) = x_F - x_G$$

Cet endomorphisme s'appelle la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Attention ! Cette définition n'a aucun sens si F et G ne sont pas supplémentaires. Le lecteur est invité à comprendre que la propriété de somme directe implique l'existence de l'endomorphisme en question et que la propriété $F + G = E$ implique l'unicité de cet endomorphisme.

Proposition 2. *Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G . On note $r = \dim(F)$ et $n = \dim(E)$ de sorte que $\dim(G) = n - r$ et on se donne également une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E adaptée à la somme directe $F \oplus G = E$. On rappelle au lecteur que ceci veut dire que $(e_1, \dots, e_r)$ constitue une base de F et que $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ constitue une base de G . Alors la matrice de s dans cette base s'écrit ainsi (elle admet une écriture diagonale par blocs) :*

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{matrix} & \begin{matrix} C_1 & \dots & C_r & C_{r+1} & \dots & C_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} L_1 \leftarrow \\ \vdots \\ L_r \leftarrow \\ L_{r+1} \leftarrow \\ \vdots \\ L_n \leftarrow \end{matrix} & \begin{pmatrix} \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \dots & (0) & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ (0) & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & -1 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & -I_{n-r,n-r} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Attention ! Si la base de la proposition précédente n'est pas adaptée à la somme directe $F \oplus G = E$, alors on ne sait rien dire sur la matrice de s dans cette base.

Lemme 3. *Toute symétrie est bijective et est sa propre réciproque.*

Proposition 4 (Noyau et images des symétries). *Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E . Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G . Alors on a :*

$$F = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$$

$$G = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$$

Lemme 5. *Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . Notons s_F la symétrie sur F parallèlement à G et s_G la symétrie sur G parallèlement à F .*

Alors $s_F = -s_G$.

Donnons maintenant un critère très simple qui permet de vérifier qu'un endomorphisme est ou non une symétrie :

Théorème 6. *Soit E un espace vectoriel et s un endomorphisme de E . Alors s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \text{Id}_E$.*

Proposition 7 (lien projection symétrie). *Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E . Soit p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G .*

Alors, on a $s = 2p - \text{Id}_E$, ou encore $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$. En particulier $s \circ p = p \circ s = p$.