Colles semaine 29

En bref

- Homothétie et projections vectorielles : définition, caractérisation par polynôme annulateur, interprétation géométrique.
- Symétries vectorielles : définition, caractérisation par polynôme annulateur, interprétation géométrique. Lien entre une symétrie et sa projection associée.
- Intégration sur un segment :
  - Construction avec les fonction en escaliers (rein d'exigibles)
  - Théorème des sommes de Riemann (Importance capitale cette semaine).
  - Propriétés de linéarité, de Chasles, de croissance de l'intégration.
  - Axiome de séparation des intégrales de fonctions continues positives.
  - Changement de variables : application aux intégrales de fonctions périodiques, paires ou impaires.
  - Rappel sur les compétences calculatoires du premier semestre : IPP, intégration de fraction rationnelle, lien entre le calcul intégral et le calcul de primitives.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

i) Si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G et p la projection sur F parallèlement à G ; établir la relation $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.En déduire que s et p commutent.

ii) Énoncer sans justification le théorème concernant les sommes de Riemann.

iii) En admettant l'énoncé du théorème des sommes de Riemann sur $[0\,;1]$, démontrer le résultat analogue sur un segment quelconque.

iv) Prouver le théorème sur les sommes de Riemann. (Réservé aux bons étudiants et on s'interdira d'y passer plus de 10 minutes quel que soient les réponses apportées).

v) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$.

vi) Pour une fonction continue et T périodique, montrer que $a \mapsto \int\limits_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t$ est constante.

vii) Pour une fonction paire (respectivement impaire), énoncer et démontrer une formule liant $\int\limits_{-a}^{a} f$ et $\int\limits_{0}^{a} f$.

Notes aux colleurs

- Le théorème des sommes de Riemann sera *énoncé* par les étudiants pour des fonctions $\mathcal{C}^0$ mais sera *démontré* pour des fonctions $\mathcal{C}^1$.
- Nous avons présenté brièvement le principe de construction de l'intégrale par approximation avec des fonctions en escaliers. Si rien n'est réellement exigible à ce propos, les étudiants ont retenu le principe permettant d'approximer une fonction continue par des fonctions en escaliers et savent réutiliser brillamment cette compétence pour prouver le résultat sur les sommes de Riemann.

En détail

Projections vectorielles

Reprise du programme précédent

Symétries vectorielles

Reprise du programme précédent

Intégration sur un segment

1 Fonctions en escaliers

1.1 Définitions et vocabulaire

Définition 1. Soit I un segment de $\mathbb{R}$. Une **subdivision** σde $I = [a, b]$ est une suite finie $(c_0, c_1, \cdots, c_n)$ strictement croissante telle que

$$\sigma = (c_0 = a < c_1 < \cdots < c_n = b)$$

— Les points c_i s'appellent les points de subdivision.
— On dit que σ est à **pas constant** lorsque $\forall i \in [\![0\,;\,n-1]\!],\ \ c_{i+1} - c_i = c_1 - c_0$.
— Une subdivision $\sigma' = (d_0 = a < d_1 < \cdots < d_p = b)$ est dite **plus fine** que σ lorsque tous les points de la subdivision de σ sont des points de σ'.

Remarque 2 (Remarque-clef). Soient σ et σ' deux subdivisions de I. On peut toujours trouver une subdivision σ'' qui soit à la fois plus fine que σ et plus fine que σ'.

Définition 3. Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Soit également $\sigma = (c_0 = a < c_1 < \cdots < c_n = b)$ une subdivision de I. On dit que f est en **escalier** par rapport à σ si pour tout $i \in [\![0\,;\,n-1]\!]$ la restriction $f|_{]c_i, c_{i+1}[}$ de f à $]c_i, c_{i+1}[$ est constante.

On dit simplement que f est en escalier s'il existe une subdivision σ, telle que f soit en escalier par rapport à cette subdivision. Une telle subdivision σ est alors dite **admissible** pour f ou **subordonnée** à f.

Remarque 4. i) Aucune condition n'est exigée sur les images des points de subdivision.

ii) Si σ est une subdivision admissible pour f alors toute subdivision plus fine l'est aussi.

iii) Une fonction en escalier est bornée. Elle admet même un maximum et un minimum.

iv) Si on modifie une fonction en escalier en un nombre fini de points, on obtient encore une fonction en escalier.

Proposition 5. *L'ensemble, noté $\mathcal{E}_I$, des fonctions en escalier sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$. Il est également stable par produit et par passage à la valeur absolue.*

1.2 Intégrales des fonctions en escaliers

Définition 6. Pour $f \in \mathcal{E}(I)$ et $\sigma = (c_0 = a < c_1 < \cdots < c_n = b)$ une subdivision subordonnée à f, on définit

$$I_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (c_{i+1} - c_i) l_i$$

où l_i est la valeur de f sur $]c_i, c_{i+1}[$.

Proposition-Définition 7 (Intégrale d'une fonction en escalier). *Soit $f \in \mathcal{E}(I)$. Le nombre $I_\sigma(f)$ est indépendant de la subdivision σ admissible pour f. On l'appelle **intégrale** de f sur I et on le note $\int_I f$ ou $\int_I f(t)\mathrm{d}t$.*

2 Intégration des fonctions continues

2.1 Interlude : un lemme d'approximation admis

Lemme 8 (Approximation des fonctions continues (Admis)). *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\epsilon > 0$. Il existe ϕ et ψ en escalier sur I telles que*

$$\forall x \in I,\ \ \phi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x) \quad \text{et} \quad \psi(x) - \phi(x) \leqslant \epsilon$$

2.2 Construction de l'intégrale

On considère ici une fonction f continue sur I et les deux ensembles

$$\mathcal{I}^+(f) = \left\{ \int_I \Psi \ / \ \ \Psi \in \mathcal{E}(I),\ f \leqslant \Psi \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}^-(f) = \left\{ \int_I \phi \ / \ \ \phi \in \mathcal{E}(I),\ \phi \leqslant f \right\}$$

On peut montrer que $\mathcal{I}^+(f)$ admet une borne inférieure, notée β, et que $\mathcal{I}^-(f)$ admet une borne supérieure, notée α.

Proposition-Définition 9 (Intégrale d'une fonction continue). *Soit f une fonction continue sur I. La borne inférieure de $\mathcal{I}^+(f)$ est égale à la borne supérieure de $\mathcal{I}^-(f)$. Ce nombre commun est appelé **intégrale** de f est est noté $\int_I f$.*

Définition 10 (Cas des bornes mal orientés). Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tout couple $(a,b) \in I^2$, on note :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} \int\limits_{[a\,;\,b]} & \text{si } a \leqslant b \\ -\int\limits_{[b\,;\,a]} & \text{si } a > b \end{cases} .$$

3 Sommes de Riemann

Proposition 11 (Théorème des sommes de Riemann normalisé sur $[0\,;\,1]$). *Si f est une fonction continue sur $I = [0,1]$, alors la suite des sommes de Riemann $(R_n(f))_n$, de terme général,*

$$S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

converge vers $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Proposition 12 (Théorème des sommes de Riemann général). *Si f est une fonction continue sur $I = [a,b]$, alors la suite des sommes de Riemann $(R_n(f))_n$, de terme général,*

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

converge vers $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Remarque 13. Ces théorèmes restent valable si les expressions $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dots$ définissant S_n sont remplacées par $\sum\limits_{k=0}^{n} \dots$ ou $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dots$ ou encore $\sum\limits_{k=1}^{n} \dots$

4 Propriétés de l'intégrale

4.1 Linéarité et Chasles

Proposition 14 (Linéarité de l'intégrale). *L'intégrale des fonctions continues est une application linéaire. C'est-à-dire que, pour toutes fonctions f et g continues sur I,*

$$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \int_I (\alpha.f + \beta.g) = \alpha.\int_I f + \beta.\int_I g$$

Proposition 15 (Formule de Chasles). *Soit f une fonction continue sur $I = [a,b]$. Pour tout $c \in]a,b[$, les restrictions de f à $[a,c]$ et à $[c,b]$ sont continues et*

$$\int\limits_{[a,b]} f = \int\limits_{[a,c]} f|_{[a,c]} + \int\limits_{[c,b]} f|_{[c,b]}$$

4.2 Positivité et croissance

Proposition 16 (Positivité et croissance de l'intégration). *Soient f et g deux fonctions continues sur $I = [a,b]$.*

i) Si $f \geqslant 0$, alors, $\int_a^b f \geqslant 0$.

ii) Si $f \leqslant g$, alors, $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

iii) $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f| \leqslant (b-a)\sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Attention ! Vérifier l'hypothèse $a \leqslant b$ est crucial lors de l'application de ces propriétés.

Définition 17. Soit f continue sur $I = [a,b]$. On appelle **valeur moyenne** de f sur I le nombre

$$\frac{1}{b-a}\int_I f$$

Proposition 18 (La valeur moyenne est atteinte). *Soit f une fonction continue sur $I = [a,b]$. Il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_I f = (b-a)f(c)$$

Proposition 19 (Axiome de séparation des intégrales de fonctions positives). *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $I = [a,b]$ et vérifiant les quatre hypothèses suivantes :*

i) La fonction f est continue sur $[a\,;\,b]$.

ii) $\forall t \in [a\,;\,b]\,,\ f(t) \geqslant 0$.

iii) $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$

iv) et $a \leqslant b$.

Alors f est constante nulle sur $[a\,;\,b]$.

4.3 Changements de variables

Proposition 20 (Changement de variable, rappel)**.** *Soit $I = [a\,;\,b]$ un intervalle et J un autre intervalle. Soit également $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : [a\,;\,b] \to J$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors :*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Corollaire 21. *Soit f une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ de période T ($T > 0$). Alors, les intégrales de f sur un intervalle de longueur T sont toutes identiques. C'est-à-dire que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque 22. De même pour f une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ de période T ($T > 0$), on a :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{a+T}^{b+T} f(t)\mathrm{d}t.$$

Lemme 23 (Intégrale et parité)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et f une fonction continue sur $[-a\,;\,a]$. Alors :*

- *Si f est paire, alors $\int\limits_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int\limits_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int\limits_{-a}^{0} f(t)\mathrm{d}t$.*
- *Si f est impaire, alors $\int\limits_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 0$.*

5 Lien avec le calcul de primitives (Rappels)

5.1 Théorie et théorème fondamental de l'analyse

Théorème 24 (Théorème fondamental de l'analyse)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Pour tout $a \in I$, l'application*

$$F : x \in J \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f sur J qui s'annule en a.

Remarque 25. Nous sommes maintenant en mesure de prouver ce théorème !

Corollaire 26. *Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Pour tous $(a,b) \in I^2$ et toute primitive F de f sur J, on a*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Corollaire 27. *Soient $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in I$. Alors,*

$$\forall x \in J, \quad f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$$

Remarque 28.
- $F(b) - F(a)$ se note $[F(x)]_a^b$.
- Si f est continue sur J, le symbole $\int f(x)\mathrm{d}x$ désigne l'ensemble des primitives de f sur J. Si F est une primitive particulière de f sur J, on écrit souvent

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{K}$$

5.2 Rappels sur l'intégration de fractions rationnelles

Méthode 29. Pour primitiver une fraction rationnelle réelle, on commence par la décomposer en élément simples dans $\mathbb{R}$ (malheureusement !).

Nous devons donc savoir intégrer des termes de types $\dfrac{a}{(t-\alpha)^k}$ pour des entiers k et des réels a et $alpha$; ainsi que des termes de types $\dfrac{at+b}{(t^2+\beta t+\gamma)^k}$ pour des entiers k et des réels (a,b,β,γ) vérifiant $\beta^2-4\gamma>0$ (le polynôme du dénominateur n'a pas de racines réelles.) Voyons donc comment intégrer chacun de ces termes.

Proposition 30. *Soit $k\in\mathbb{N}^*$ et $(a,\alpha)\in\mathbb{R}^2$. Alors, si $k=1$:*

$$\int \frac{a}{t-\alpha}\mathrm{d}t = a\ln(|t-\alpha|)+C \quad \text{avec } C\in\mathbb{R}.$$

et si $k\geqslant 2$:

$$\int \frac{a}{(t-\alpha)^k}\mathrm{d}t = -\frac{a}{k-1}\frac{1}{(t-\alpha)^{k-1}}+C \quad \text{avec } C\in\mathbb{R}.$$

Pour les termes correspondant aux polynômes irréductibles de degré deux, on les mets d'abord sous forme canonique et par changement de variable affine on se ramène au calcul de l'intégrale de terme de type $\dfrac{at+b}{(t^2+\alpha^2)^k}$ pour des entiers k et des réels a, b et α.

Voyons d'abord le cas où $k=1$

Proposition 31. *Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Alors :*

$$\int \frac{2t}{t^2+\alpha^2} = \ln(|t^2+\alpha^2|)+C \quad \text{avec } C\in\mathbb{R}.$$

et

$$\int \frac{1}{t^2+\alpha^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{t}{a})+C \quad \text{avec } C\in\mathbb{R}.$$

On conclut ensuite par combinaison linéaire de ces termes.

Attention ! Les méthodes qui suivent ne figurent pas officiellement au programme de PT. L'énoncé doit vous guider si un tel calcul est nécessaire.

Pour le cas $k\geqslant 2$, on se ramène par itérations au cas précédent en abaissant le degré de k puis en utilisant les lemmes suivants.

Lemme 32. *Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{N}$ avec $k\geqslant 2$. Alors :*

$$\int \frac{2t}{(t^2+\alpha^2)^k} = -\frac{1}{k-1}\frac{1}{(t^2+\alpha^2)^{k-1}}+C \quad \text{avec } C\in\mathbb{R}.$$

Pour le terme de type $\frac{1}{(t^2+\alpha^2)^k}$, on écrit $\frac{1}{(t^2+\alpha^2)^k}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{(t^2+\alpha^2)^{k-1}}-\frac{t^2}{(t^2+\alpha^2)^k}\right)$, puis on utilise le lemme :

Lemme 33. *Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{N}$ avec $k\geqslant 2$. Alors :*

$$\int \frac{t^2}{(t^2+\alpha^2)^k} = \frac{1}{2(1-k)}\frac{t}{(t^2+\alpha^2)^{k-1}}+\frac{1}{2(k-1)}\int\frac{1}{(t^2+\alpha^2)^{k-1}}+C \quad \text{avec } C\in\mathbb{R}.$$