Suites définies explicitement. Recherches de limites et d'équivalents.

1. Étudier la convergence des suites de terme général

$$u_n = n - \sqrt[3]{n^3+1} \quad ; \qquad v_n = \sin\left(\pi\, \frac{n^2+2n+3}{n+1}\right) \quad ; \qquad w_n = \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} \,.$$

Pour les deux premières, proposer un équivalent.

2.a. Donner un développement limité à l'ordre 1 de $u_n = \sqrt[n]{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$, autrement dit trouver des réels a et b tels que $u_n = a + \dfrac{b}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$.

b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (3\,\sqrt[n]{2} - 2\,\sqrt[n]{3})^n$.

3. Pour tout n entier naturel, on note $N(n)$ le nombre de chiffres de l'entier n dans son écriture décimale, et $S(n)$ la somme de ses chiffres.

Par exemple, $N(23) = 2$ et $S(23) = 5$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \log(n) \leq N(n) \leq 1 + \log(n)$, où log est le logarithme décimal.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 \leq S(n) \leq 9\big(1 + \log(n)\big)$.

c. Soit $u_n = \dfrac{S(n+1)}{S(n)}$. Montrer que la suite (u_n) est bornée, donner ses bornes inférieure et supérieure.

Suites définies par récurrence.

4. Soit (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 \geq -1$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$. Déterminer son sens de variation, étudier sa convergence.

5. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \sin(u_n)\,.$$

a. Montrer que (u_n) décroît et tend vers zéro.

b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, avec $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$.

c. *On rappelle le lemme de Cesàro, hors programme, que l'on ne demande pas de démontrer : si (v_n) est une suite réelle de limite l, alors on a aussi* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k = l$. En déduire un équivalent de la suite (u_n).

6. Soient (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n\,.$$

Que dire de la suite $(u_n - v_n)$? Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

7. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une application 1-lipschitzienne. Soit (x_n) une suite réelle définie par la donnée de $x_0 \in [a,b]$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = \dfrac{x_n + f(x_n)}{2}$. Montrer que la suite (x_n) converge vers un réel l tel que $f(l) = l$.

8. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, on suppose que $\forall x \in [a,b] \quad |f'(x)| < 1$.

a. Montrer que f admet un unique point fixe α.

b. Soit (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 \in [a,b]$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

9*. Points fixes répulsifs ou attractifs

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to I$ une application de classe $\mathcal{C}^1$, soit $x_0 \in I$ un point fixe de f. Soit par ailleurs (u_n) une suite telle que $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

a. On suppose que $|f'(x_0)| > 1$. Montrer que la suite (u_n) ne converge vers x_0 que si elle est stationnaire.

b. On suppose que $|f'(x_0)| < 1$. Montrer que, si u_0 est suffisamment proche de x_0, alors la suite (u_n) converge vers x_0.

10. Soient a et b deux réels tels que $0 < b \leq a$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{2}{v_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} .$$

a. Montrer que ces suites sont adjacentes et déterminer leur limite commune l.

b. Montrer que la suite (x_n), définie par $x_n = \ln\left(\dfrac{u_n - l}{u_n + l}\right)$, est une suite géométrique.

c. En déduire une expression explicite de u_n en fonction de n et de x_0.

11*. Méthode de Newton

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, convexe, de classe $\mathcal{C}^2$, avec $f(a) < 0 < f(b)$.

a. Montrer que f admet un unique zéro, noté α, sur $[a, b]$.

b. On définit une suite (u_n) par $u_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$, où l'on a posé $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et qu'elle converge vers α.

c. On suppose dans cette question que f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[a, b]$. En appliquant à φ l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer qu'il existe un reél positif M tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_{n+1} - \alpha| \leq M\,(u_n - \alpha)^2 .$$

On dit que la vitesse de convergence de (u_n) vers α est **quadratique**, ou encore **d'ordre 2**.

Suites définies implicitement.

12. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $g_n : x \mapsto \displaystyle\int_n^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel x_n tel que $g_n(x_n) = 1$.

b. Donner un équivalent de (x_n).

c. Soit k un entier naturel. Montrer que l'on a $x_n = n + o\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$ lorsque $n \to +\infty$.

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit P_n la fonction polynôme définie par $P_n(x) = x^n + x - 1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n admet une unique racine réelle positive, que l'on notera x_n. Vérifier que $x_n \in]0, 1[$. Montrer que la suite (x_n) est croissante. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$ (*indication : pour $\varepsilon > 0$ fixé, on pourra exprimer $P_n(1 - \varepsilon)$. Une autre méthode consiste à raisonner par l'absurde en supposant que $l = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \neq 1$*).

14. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\sin x = \dfrac{1}{x}$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle $I_n = \left[2n\,\pi, \left(2n + \dfrac{1}{2}\right)\pi\right]$. Montrer que la suite $(x_n - 2n\pi)$ converge vers zéro en décroissant, donner un équivalent du terme général de cette suite.

15. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = x\,e^x - n$.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n, et montrer qu'elle est strictement positive.

b. Montrer les inégalités $1 \leq u_n \leq \ln(n)$ pour $n \geq 3$.

c. Montrer que $u_n \sim \ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d. Trouver un équivalent de $u_n - \ln(n)$.

16.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $x + \ln(x) = n$ admet une unique solution, que l'on notera x_n, dans $\mathbb{R}_+^*$.

b. Montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.

c. Donner un développement asymptotique de x_n avec trois termes non nuls, plus un reste.

Autres exercices sur les suites. Ensembles dénombrables.

17. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2\right) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

18. Théorème de Cesàro

a*. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ (v_n est la moyenne arithmétique des n premiers termes de la suite u). On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

b. Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = l$ ($l \in \mathbb{R}$). Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = l$.

c. Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = l$ avec $l \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$.

d. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dbinom{2n}{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

19. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs. Pour tout n, on pose $y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \cdots + \sqrt{x_n}}}$.

a. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ lorsque (x_n) est une suite constante de valeur $a > 0$.

b. Même question lorsque $x_n = a\,b^{2^n}$ avec $a > 0$, $b > 0$.

c*. Montrer que (y_n) converge si et seulement s'il existe un réel positif M tel que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n \leq M^{2^n}$.

20. Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dite **sous-additive** si elle vérifie

$$\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \qquad u_{m+n} \le u_m + u_n \ .$$

a. Pour quels réels α la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $v_n = n^\alpha$ est-elle sous-additive ? Lorsque c'est le cas, déterminer la limite de $\dfrac{v_n}{n}$.

b. Quelles sont les suites réelles $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant $\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad w_{m+n} = w_m + w_n$? Déterminer alors la limite de $\dfrac{w_n}{n}$.

c*. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle sous-additive, on suppose que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ est minorée et on pose $\alpha = \inf\left\{\dfrac{u_n}{n}\ ;\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \alpha$. *On pourra fixer $\varepsilon > 0$ et considérer un entier p tel que $\alpha \le \dfrac{u_p}{p} \le \alpha + \dfrac{\varepsilon}{2}$, puis utiliser une division euclidienne.*

21. Soit (u_n) une suite réelle. On suppose qu'il existe un réel k appartenant à l'intervalle $]0,1[$ et une suite réelle (r_n) de limite nulle, tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left|u_{n+1}\right| \le k\,|u_n| + |r_n| \ .$$

On se donne par ailleurs un réel ε strictement positif.

a. Justifier l'existence d'un entier N tel que, pour tout $n \ge N$, on ait $|r_n| \le \dfrac{\varepsilon}{2}(1-k)$.

b. Montrer que, pour tout entier n tel que $n \ge N$, on a $|u_n| \le k^{n-N}\,|u_N| + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

c. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

22*. Une suite réelle (a_n) est dite **convexe** si on a $\forall n\in\mathbb{N} \quad a_{n+1} \le \dfrac{a_n + a_{n+2}}{2}$. Elle est dite **concave** si la suite $(-a_n)$ est convexe.

a. Par quelle propriété simple de la suite (d_n), de terme général $d_n = a_{n+1} - a_n$, se traduit la convexité d'une suite réelle (a_n) ? Quelles sont les suites réelles qui sont à la fois convexes et concaves ?

b. Soit (a_n) une suite convexe majorée. Montrer qu'elle est décroissante.

c. Dans cette question, (a_n) est une suite convexe bornée et on pose $d_n = a_{n+1} - a_n$ pour tout n.

i. Montrer que la suite (a_n) est convergente.

ii. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \ge 2p$. Prouver les inégalités $2(a_n - a_p) \le n d_{n-1} \le 0$.

iii. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n d_n = 0$.

23.a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

b. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ est infini non dénombrable. *On pourra supposer qu'il existe une bijection φ de $\mathbb{N}$ vers $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et chercher une contradiction en considérant l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin \varphi(n)\}$.*