Séries à termes positifs.

1. Nature des séries de terme général u_n, avec

a. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$; **b**. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$; **c**. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{\left(e^n - 1\right)^\alpha}$; **d**. $u_n = \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n\ \ln^2(n)}$.

2. Calculer les sommes

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{et} \quad T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} .$$

3. On considère les intégrales de Wallis $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n}\, \mathrm{d}t$.

a. Prouver la relation $W_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2} W_n$.

b. On pose $u_n = \sqrt{n}\, W_n$. Montrer que la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge.

c. En déduire l'existence d'un réel strictement positif K tel que $W_n \sim \dfrac{K}{\sqrt{n}}$.

4. En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer la partie entière du nombre

$$N = \sum_{k=1}^{10^4} \frac{1}{\sqrt{k}} .$$

5. Donner un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ \ln k}$

6. Séries de Bertrand

On appelle ainsi les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$, avec $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha\ (\ln n)^\beta}$, où α et β sont deux réels. On se propose d'étudier leur convergence.

a. On suppose $\alpha > 1$. En étudiant $n^\gamma u_n$, pour un choix convenable de γ, montrer que la série converge.

b. On suppose $\alpha < 1$. En considérant nu_n, montrer que la série diverge.

c. On suppose $\alpha = 1$. Par comparaison à une intégrale, discuter de la nature de la série $\sum u_n$.

7. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, convergente. Pour tout n, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

a. Démontrer la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} R_k - \sum_{k=1}^{n} k u_k = (n+1)\, R_n$.

b. En cas de convergence de la série $\sum n u_n$, montrer que $(n+1)\, R_n \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} k u_k$.

c. En déduire que les séries $\sum n\ u_n$ et $\sum R_n$ sont de même nature et que, en cas de convergence, elles ont la même somme.

8. Étudier la suite (u_n) définie par $0 < u_0 \leq \dfrac{\pi}{2}$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Déterminer la nature des séries de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, puis u_n^2 et enfin u_n.

9. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}(k)$.

a. Donner un équivalent de S_n.

b. Montrer qu'il existe un réel α tel que l'on ait le développement asymptotique

$$S_n = \frac{n\pi}{2} - \ln(n) + \alpha + o(1) \ .$$

10. Soit $\sum_{n\geq 1} u_n$ une série à termes strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$v_n = \frac{u_n}{u_1 + \cdots + u_n} \ .$$

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. *En cas de divergence, on pourra considérer l'expression* $\ln(1 - v_n)$.

11. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Convergence et calcul de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{x}{2^n}\right)$.

12*. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes strictement positifs. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout n.

a. Montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_{n-1}}$ est de même nature que la série $\sum u_n$.

En cas de divergence de cette dernière, on écrira un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

b. On suppose que la série $\sum u_n$ diverge. Montrer que, pour tout $\alpha > 1$, la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.

c. On suppose que la série $\sum u_n$ converge, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ pour tout n. Montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{R_n}$ est divergente.

Séries à termes quelconques. Convergence absolue.

13. On rappelle le développement asymptotique $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

a. Soit $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{3k-1}{3k}\right)$. Montrer qu'il existe des constantes a et b telles que

$$\ln(u_n) = a\ \ln(n) + b + o(1) \ .$$

b. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

14.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier relatif pair.

b. En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \sin\left((2+\sqrt{3})^n\pi\right)$.

15. Déterminer la nature des séries suivantes et, en cas de convergence, calculer leur somme :

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$; **b)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \big(\ln n + a\ \ln(n+1) + b\ \ln(n+2)\big)$ avec a et b réels.

16. Déterminer la nature des séries $\displaystyle\sum_n u_n$ dans chacun des cas suivants :

a) $u_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}$; **b)** $u_n = \ln n \cdot \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$; **c)** $\sin\left(\dfrac{\pi\, n^2}{n+1}\right)$.

17. Donner un développement limité de $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{1+x}$ sous la forme $f(x) = a+bx+cx^2+O(x^3)$.

En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$, avec $u_n = \dfrac{(-1)^n\,\sqrt{n}\,\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{(-1)^n + \sqrt{n}}$.

18. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$, avec $u_n = (-1)^n \left(\text{Arccos}\,\dfrac{1}{n} - \text{Arccos}\,\dfrac{1}{n^2}\right)$.

19. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\,\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que la série de terme général $(-1)^n\,a_n$ converge.

b. Exprimer la somme partielle $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$, puis la somme $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ sous forme d'intégrales.

c. Calculer S. *On pourra utiliser le changement de variable* $t = \cos(2u)$.

20. Soit x un réel non multiple de 2π. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

a. Montrer que la suite (S_n) est bornée.

b. En remarquant que $\cos(nx) = S_n - S_{n-1}$, montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{\cos(nx)}{n}$ est convergente.

c. En exploitant l'inégalité $|\cos(\theta)| \geq \cos^2(\theta)$, montrer la divergence de la série $\sum |u_n|$.

21*.a. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\,e^{int}\,\mathrm{d}t = 0$.

b. Soit $x \in]0, 2\pi[$, soit n un entier naturel non nul. Prouver l'identité

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikx} - e^{ik\pi}}{ik} = -\frac{1}{2i} \int_\pi^x \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin\frac{t}{2}}\,(1 - e^{int})\,\mathrm{d}t\ .$$

c. Convergence et somme de $S(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k}$.

Autres exercices sur les séries.

22. On note l^1 l'ensemble des suites réelles **sommables**, c'est-à-dire des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ soit absolument convergente.

On note l^2 l'ensemble des suites réelles **de carré sommable**, c'est-à-dire des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n^2$ soit (absolument) convergente.

a. Montrer que l^1 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b. Montrer que $l^1 \subset l^2$, et montrer que cette inclusion est stricte.

c. Soient $u \in l^2$, $v \in l^2$. Montrer que $uv \in l^1$, où uv est la suite réelle définie par $(uv)_n = u_n v_n$.

d. En déduire que l^2 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

e. Pour $u \in l^2$, $v \in l^2$, on pose $< u, v >= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur l^2.

23*. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles ou complexes, on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et que la suite (v_n) est sommable. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = 0$.

24. On admet le développement asymptotique $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$, où $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a. En déduire la somme de la série harmonique alternée

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

b. On modifie l'ordre des termes de cette dernière série de la façon suivante:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{6} + \cdots$$

Montrer que la nouvelle série obtenue converge et calculer sa somme.

c. Plus généralement, soient p et q deux entiers naturels non nuls. On considère une série construite à partir de la série harmonique alternée en sommant alternativement p termes impairs (positifs), puis q termes pairs (négatifs), et ainsi de suite. Quelle est la somme de cette série ?

25. Pour p entier naturel, on pose $S(p) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{n!}$. Montrer que, pour tout p entier naturel, il existe un entier naturel K_p tel que $S(p) = K_p\, e$.