Suites définies explicitement. Recherches de limites et d'équivalents.

1. Étudier la convergence des suites de terme général

$$u_n = n - \sqrt[3]{n^3+1} \quad ; \qquad v_n = \sin\left(\pi\,\frac{n^2+2n+3}{n+1}\right) \quad ; \qquad w_n = \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} \ .$$

- -

a. Un DL donne $u_n = n\left(1-\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = n\left(1-\left(1+\frac{1}{3n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{3n^2}$,
d'où immédiatement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b. On a

$$\begin{aligned} v_n &= \sin\left(\pi\,\frac{(n+1)^2+2}{n+1}\right) = \sin\left((n+1)\pi+\frac{2\pi}{n+1}\right) \\ &= (-1)^{n+1}\,\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^{n+1}\,\frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

en utilisant $\sin(x) \underset{x\to0}{\sim} x$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

c. Ici, on a $0 \le w_n \le \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$. Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

2.a. Donner un développement limité à l'ordre 1 de $u_n = \sqrt[n]{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$, autrement dit trouver des réels a et b tels que $u_n = a + \frac{b}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)$.

b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (3\ \sqrt[n]{2} - 2\ \sqrt[n]{3})^n$.

- -

a. $u_n = 2^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln 2} = 1+\frac{\ln 2}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)$, en utilisant le développement limité $e^x = 1+x+o(x)$ au voisinage de zéro.

b. Posons $x_n = (3\ \sqrt[n]{2} - 2\ \sqrt[n]{3})^n$. En développant comme en **a.**, on obtient

$$3\ \sqrt[n]{2} - 2\ \sqrt[n]{3} = 3\left(1+\frac{\ln 2}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right) - 2\left(1+\frac{\ln 3}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right) = 1+\frac{3\ln 2-2\ln 3}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\ .$$

Donc $\ln x_n = n\ln(3\sqrt[n]{2}-2\sqrt[n]{3}) = n\ln\left(1+\frac{3\ln 2-2\ln 3}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3\ln 2-2\ln 3$, en utilisant l'équivalent $\ln(1+x)\sim x$ au voisinage de zéro ou, ce qui revient au même, le développement limité $\ln(1+x) = x+o(x)$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = e^{3\ln 2-2\ln 3} = \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9}$.

---

3. Pour tout n entier naturel non nul, on note $N(n)$ le nombre de chiffres de l'entier n dans son écriture décimale, et $S(n)$ la somme de ses chiffres.

Par exemple, $N(23) = 2$ et $S(23) = 5$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \log(n) \le N(n) \le 1+\log(n)$, où log est le logarithme décimal.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 \le S(n) \le 9\big(1+\log(n)\big)$.

c. Soit $u_n = \frac{S(n+1)}{S(n)}$. Montrer que la suite (u_n) est bornée, donner ses bornes inférieure et supérieure.

- -

a. Les nombres s'écrivant avec N chiffres dans le système de numération décimale sont les entiers allant de 10^{N-1} à $10^N - 1$. *Pour s'en persuader, les nombres à trois chiffres vont de 100 à 999.* Pour tout entier naturel non nul n, on a donc $10^{N(n)-1} \leq n \leq 10^{N(n)}$. En passant au logarithme décimal (fonction croissante), cela donne $N(n)-1 \leq \log(n) \leq N(n)$. Il ne reste plus qu'à ajouter 1 à l'inégalité de gauche, et on déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \log(n) \leq N(n) \leq 1 + \log(n) \ .$$

b. L'inégalité $S(n) \geq 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est triviale, par ailleurs les "chiffres" du système décimal étant majorés par 9, on a aussi, en utilisant **a.**,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 1 \leq S(n) \leq 9\, N(n) \leq 9\,\big(1 + \log(n)\big) \ .$$

c. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$, donc la suite (u_n) est minorée par 0. En fait on a $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n = 0$ puisque, en prenant des entiers n de la forme $10^k - 1$ dont l'écriture décimale est constituée de k chiffres 9, on a $S(n) = 9k$, $S(n+1) = 1$ donc $u_n = \dfrac{1}{9k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La suite (u_n) n'admet pas de minimum, mais une borne inférieure qui vaut 0 et qui n'est pas atteinte.

• On a $u_1 = \dfrac{S(2)}{S(1)} = \dfrac{2}{1} = 2$ et c'est la valeur maximale de la suite (u_n). En effet, on a $S(n+1) \leq S(n) + 1$ pour tout n puisque:

- si l'écriture décimale de n se termine par un chiffre autre que 9, alors $S(n+1) = S(n)+1$;

- si l'écriture décimale de n se termine par une séquence de k chiffres 9, on a alors $S(n+1) = S(n) - 9k + 1 < S(n)$.

Donc $u_n = \dfrac{S(n+1)}{S(n)} \leq \dfrac{S(n)+1}{S(n)} = 1 + \dfrac{1}{S(n)} \leq 2$, cette dernière inégalité résultant de $S(n) \geq 1$. En conclusion, $\max\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n = u_1 = 2$.

Suites définies par récurrence.

4. Soit (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 \geq -1$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$. Déterminer son sens de variation, étudier sa convergence.

- -

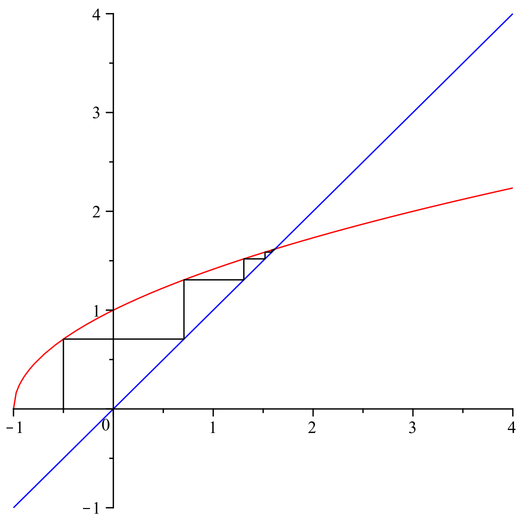
La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ est définie sur l'intervalle $I = [-1, +\infty[$ et cet intervalle est stable par f puisque $f(I) = [0, +\infty[\subset I$. La suite (u_n) est donc bien définie si l'on initialise avec $u_0 \in I$. Recherchons les points fixes de f :

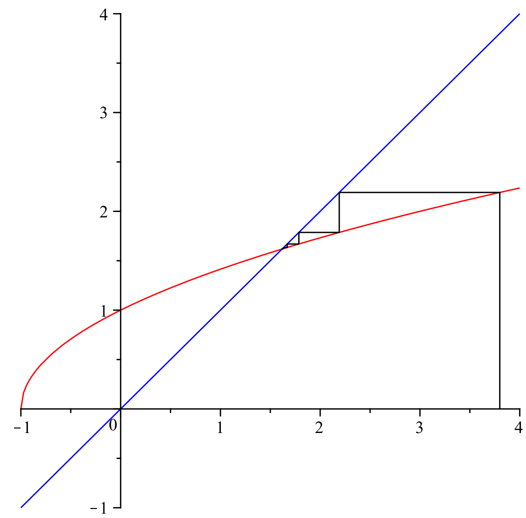
$$f(x) = x \iff \sqrt{1+x} = x \iff \left\{ 1 + x = x^2 \quad \text{et} \quad x \geq 0 \right\} \iff x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (\textit{nombre d'or})\ .$$

Posons désormais $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ pour simplifier l'écriture. Comme f est continue sur I, la seule limite possible pour la suite (u_n) est α. De la croissance de f sur I, on déduit que chacun des intervalles $I_1 = [-1, \alpha]$ et $I_2 = [\alpha, +\infty[$ est stable par f. D'autre part, on a $f(x) \geq x$ sur I_1 et $f(x) \leq x$ sur I_2. Donc :

- si $u_0 \in I_1$, alors la suite (u_n) est croissante. Comme elle est majorée par α, elle converge. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$ (car seule limite possible).

- si $u_0 \in I_2$, la suite est décroissante. Elle converge car elle est minorée par α. Enfin, ici aussi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.





Dessins réalisés avec $u_0 = -0.5$ *et* $u_0 = 3.8$ *respectivement*

---

5. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \sin(u_n)\ .$$

a. Montrer que (u_n) décroît et tend vers zéro.

b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, avec $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$.

c. *On rappelle le lemme de Cesàro que l'on ne demande pas de démontrer : si (v_n) est une suite réelle de limite l, alors on a aussi* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k = l$. En déduire un équivalent de la suite (u_n).

- -

a. Le segment $[0,1]$ est stable par la fonction sinus et $\sin x \leq x$ sur cet intervalle, donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge. La fonction sinus étant continue, la limite l de la suite (u_n) vérifie $\sin(l) = l$, et on s'assure que $l = 0$ est la seule solution.

b. On a $v_n = \dfrac{1}{\sin^2 u_n} - \dfrac{1}{u_n^2} = \dfrac{u_n^2 - \sin^2 u_n}{u_n^2\ \sin^2 u_n}$. Comme u_n tend vers zéro, on peut utiliser le développement limité en 0 de la fonction sinus pour montrer que le dénominateur est équivalent à u_n^4 alors que le numérateur est équivalent à $\dfrac{1}{3}u_n^4$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{3}$.

c. Soit $w_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k$; on a aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{1}{3}$ par Cesàro, mais par télescopage, $w_n = \dfrac{1}{n\,u_n^2} - \dfrac{1}{n\,u_0^2}$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\,u_0^2} = 0$, il reste $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\,u_n^2} = \frac{1}{3}$, soit $u_n^2 \sim \dfrac{3}{n}$ et, comme u_n est positif, $u_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{n}}$.

---

6. Soient (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n\ .$$

Que dire de la suite $(u_n - v_n)$? Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

- -

On note que $u_{n+1} - v_{n+1} = u_n - v_n$, la suite $(u_n - v_n)$ est donc constante, de valeur $u_0 - v_0 = -1$. Donc $u_n = v_n - 1$ pour tout n.

En remplaçant dans la deuxième relation de récurrence, on a alors $v_{n+1} = 2(v_n - 1) + 3v_n$, soit $v_{n+1} = 5v_n - 2$, on reconnaît l'expression d'une suite arithmético-géométrique, on résout alors l'équation $l = 5l - 2$, ce qui donne $l = \dfrac{1}{2}$, et on introduit la suite (w_n) telle que $w_n = v_n - \dfrac{1}{2}$. On constate alors que $w_{n+1} = 5w_n$, la suite (w_n) est géométrique de raison 5, donc $w_n = 5^n w_0 = \dfrac{3}{2} \times 5^n$, puis $v_n = w_n + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \times 5^n + \dfrac{1}{2}$.

Enfin, $u_n = v_n - 1 = \dfrac{3}{2} \times 5^n - \dfrac{1}{2}$.

---

7. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une application 1-lipschitzienne. Soit (x_n) une suite réelle définie par la donnée de $x_0 \in [a,b]$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = \dfrac{x_n + f(x_n)}{2}$. Montrer que la suite (x_n) converge vers un réel l tel que $f(l) = l$.

- -

Pour $x \in [a,b]$, posons $g(x) = \dfrac{f(x) + x}{2}$. En ajoutant les inégalités $a \le x \le b$ et $a \le f(x) \le b$, on obtient $a \le g(x) \le b$, autrement dit le segment $[a,b]$ est stable par g, ce qui montre déjà que la suite (x_n) est bien définie et qu'elle prend ses valeurs dans $[a,b]$.

Soient $(x,y) \in [a,b]^2$; alors $g(y) - g(x) = \dfrac{1}{2}\Big[\big(f(y) - f(x)\big) + (y - x)\Big]$; comme f est 1-lipschitzienne, on a $|f(y) - f(x)| \le |y - x|$, on en déduit que $g(y) - g(x)$ est du même signe que $y - x$, donc que la fonction g est croissante sur $[a,b]$.

Il en résulte que la suite (x_n) est monotone : en effet, $x_{n+2} - x_{n+1} = g(x_{n+1}) - g(x_n)$ est du même signe que $x_{n+1} - x_n$, donc (par récurrence) du même signe que $x_1 - x_0$, d'où la monotonie de la suite (x_n).

La suite (x_n) est monotone et bornée, elle est donc convergente, notons $l = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n$, on a bien sûr $l \in [a,b]$ (en passant à la limite dans les inégalités $a \le x_n \le b$). La fonction f est continue sur $[a,b]$ car elle est lipschitzienne, on en déduit que g est continue aussi. En passant à la limite dans la relation $x_{n+1} = g(x_n)$, on obtient $l = g(l)$, ce qui équivaut à $l = f(l)$.

---

8. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, on suppose que $\forall x \in [a,b] \quad |f'(x)| < 1$.

a. Montrer que f admet un unique point fixe α.

b. Soit (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 \in [a,b]$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

- -

a. Posons $g(x) = f(x) - x$ pour $x \in [a,b]$. Alors g est continue sur $[a,b]$ avec $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Du théorème des valeurs intermédiaires, on déduit l'existence d'un point $\alpha \in [a,b]$ tel que $g(\alpha) = 0$, i.e. $f(\alpha) = \alpha$. On a donc l'existence d'un point fixe de f.

Si f admettait un autre point fixe β avec $\beta \neq \alpha$ (supposons $\alpha < \beta$), l'égalité des accroissements finis affirmerait l'existence d'un point $c \in]\alpha, \beta[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha} = 1 ,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc unicité du point fixe de f.

b. La fonction $x \mapsto \left|f'(x)\right|$ est continue sur le segment $[a,b]$, elle y admet donc un maximum k atteint en un point c de $[a,b]$. On a alors nécessairement $k = \left|f'(c)\right| < 1$, et

$$\forall x \in [a,b] \qquad \left|f'(x)\right| \leq k ,$$

donc, par l'inégalité des accroissements finis, f est k-lipschitzienne sur $[a,b]$. Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha| = \left|f(u_n) - f(\alpha)\right| \leq k\,|u_n - \alpha| ,$$

puis par une récurrence immédiate, $|u_n - \alpha| \leq k^n\,|u_0 - \alpha|$ donc, par majoration, $\lim_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$, soit $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

9*. Points fixes répulsifs ou attractifs

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to I$ une application de classe $\mathcal{C}^1$, soit $x_0 \in I$ un point fixe de f. Soit par ailleurs (u_n) une suite telle que $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

a. On suppose que $|f'(x_0)| > 1$. Montrer que la suite (u_n) ne converge vers x_0 que si elle est stationnaire.

b. On suppose que $|f'(x_0)| < 1$. Montrer que, si u_0 est suffisamment proche de x_0, alors la suite (u_n) converge vers x_0.

- -

a. Soit k un réel tel que $1 < k < |f'(x_0)|$; par continuité de f', on a $|f'| \geq k$ dans un voisinage de x_0, c'est-à-dire dans un intervalle de la forme $V = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$. Si la suite (u_n) tend vers x_0, alors il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suite se trouvent dans V (*cette affirmation n'est rien d'autre que la définition de la notion de limite*). Mais alors, pour $n \geq N$, on a

$$|u_{n+1} - x_0| = \left|f(u_n) - f(x_0)\right| = |f'(c_n)|\,|u_n - x_0|$$

(égalité des accroissements finis), où c_n appartient à l'intervalle $[x_0, u_n]$ ou $[u_n, x_0]$, donc à V, ce qui entraîne que $|f'(c_n)| \geq k$. On a donc $|u_{n+1} - x_0| \geq k\,|u_n - x_0|$ pour $n \geq N$ d'où, par une récurrence immédiate, pour $n \geq N$, $|u_n - x_0| \geq k^{n-N}\,|u_N - x_0|$, et cette dernière expression tend vers $+\infty$ si $u_N \neq x_0$ ce qui contredirait l'hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$. Ainsi, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$, on a nécessairement $u_N = x_0$, puis la suite est alors stationnaire à partir du rang N. On dit que x_0 est un point fixe **répulsif**.

b. Soit k un réel tel que $|f'(x_0)| < k < 1$, de façon analogue à ci-dessus, on a alors $|f'| \leq k$ dans un voisinage $V = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ de x_0 (avec $\varepsilon > 0$) ; des inégalités d'accroissements finis, on déduit de plus (*détails laissés à l'improbable lecteur*) que cet intervalle V est stable par f. Si on prend $u_0 \in V$, alors on a $u_n \in V$ pour tout n et, de façon semblable à la question **a.**, on obtient $|u_n - x_0| \leq k^n |u_0 - x_0|$ pour tout n, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$. On dit que x_0 est un point fixe **attractif**.

---

10. Soient a et b deux réels tels que $0 < b \leq a$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{2}{v_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}\ .$$

a. Montrer que ces suites sont adjacentes et déterminer leur limite commune l.

b. Montrer que la suite (x_n), définie par $x_n = \ln\left(\dfrac{u_n - l}{u_n + l}\right)$, est une suite géométrique.

c. En déduire une expression explicite de u_n en fonction de n et de x_0.

- -

a. Les suites u et v sont définies par

$$u_0 = a \quad ; \qquad v_0 = b \quad ; \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}\ .$$

Les nombres u_{n+1} et v_{n+1} sont respectivement la **moyenne arithmétique** et la **moyenne harmonique** des nombres u_n et v_n. Une récurrence immédiate montre que, pour tout n, u_n et v_n sont bien définis et sont strictement positifs. De l'inégalité $(x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2 \geq 0$, on déduit que, quels que soient les réels strictement positifs x et y avec $x \leq y$, on a $x \leq \dfrac{2xy}{x+y} \leq \dfrac{x+y}{2} \leq y$. De là, on montre facilement par récurrence sur n la suite d'inégalités $v_n \leq v_{n+1} \leq u_{n+1} \leq u_n$: la suite (v_n) est donc croissante, et la suite (u_n) est décroissante ; on en tire aussi que

$$0 \leq u_{n+1} - v_{n+1} \leq u_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{1}{2}\,(u_n - v_n)$$

puis, par récurrence, que $0 \leq u_n - v_n \leq \dfrac{1}{2^n}\,(u_0 - v_0)$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ et les suites sont adjacentes.

Soit l leur limite commune ; on voit facilement (*à condition d'y penser!*) que $u_{n+1}v_{n+1} = u_n v_n$, donc la suite $(u_n v_n)$ est constante : $u_n v_n = u_0 v_0 = ab$ pour tout n. En passant à la limite, on obtient $l^2 = ab$, d'où $l = \sqrt{ab}$ puisque l doit être positif. Le nombre l est la **moyenne géométrique** de a et b.

b. Un peu de calcul, utilisant $u_n v_n = l$ pour tout entier n :

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \ln\Big(\frac{u_{n+1}-l}{u_{n+1}+l}\Big) = \ln\Big(\frac{u_n+v_n-2l}{u_n+v_n+2l}\Big) = \ln\Big(\frac{u_n+v_n-2\sqrt{u_nv_n}}{u_n+v_n+2\sqrt{u_nv_n}}\Big)\\
&= \ln\Big(\frac{(\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n})^2}{(\sqrt{u_n}+\sqrt{v_n})^2}\Big) = 2\ \ln\Big(\frac{\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{v_n}}\Big)\\
&= 2\ \ln\Big(\frac{u_n-\sqrt{u_nv_n}}{u_n+\sqrt{u_nv_n}}\Big) = 2\ \ln\Big(\frac{u_n-l}{u_n+l}\Big) = 2x_n\ .
\end{aligned}$$

Donc (x_n) est une suite géométrique de raison 2.

c. Cela permet d'expliciter u_n et v_n en fonction de n directement : on a $x_n = 2^n x_0$, et l'improbable lecteur vérifiera que, si l'on pose $r = e^{x_0} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, on trouve

$$u_n = \sqrt{ab}\,\frac{1+r^{2^n}}{1-r^{2^n}} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sqrt{ab}\,\frac{1-r^{2^n}}{1+r^{2^n}}\ ,$$

ce qui, puisque $0 \leq r < 1$, montre une convergence très rapide des suites (u_n) et (v_n) vers leur limite commune $l = \sqrt{ab}$.

11*. Méthode de Newton

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, convexe, de classe $\mathcal{C}^2$, avec $f(a) < 0 < f(b)$.

a. Montrer que f admet un unique zéro, noté α, sur $[a,b]$.

b. On définit une suite (u_n) par $u_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}\quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$, où l'on a posé $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et qu'elle converge vers α.

c. On suppose dans cette question que f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[a,b]$. En appliquant à φ l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer qu'il existe un reél positif M tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_{n+1}-\alpha| \leq M\,(u_n-\alpha)^2\ .$$

On dit que la vitesse de convergence de (u_n) vers α est **quadratique**, ou encore **d'ordre 2**.

- -

a. • La fonction f, continue, admet au moins un zéro α sur $]a,b[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

• Si f admettait deux zéros α et β avec $a < \alpha < \beta < b$, alors par convexité de f sur le segment $[a,\beta]$, le graphe de f serait en-dessous de sa sécante sur ce segment, et alors

$$\forall x \in\,]a,\beta[\qquad f(x) \leq f(a) + (x-a)\,\frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a} = f(a)\,\frac{\beta-x}{\beta-a} < 0\ ,$$

ce qui contredit $f(\alpha) = 0$.

• Remarquons que $f'(\alpha) > 0$: en effet, si on avait $f'(\alpha) \leq 0$, alors on aurait $f' \leq 0$ sur $[a,\alpha]$ puisque f' est croissante, donc f serait décroissante sur cet intervalle et $f(a) \geq f(\alpha) = 0$, absurde. Comme f' est croissante, on a $f' > 0$ sur $[\alpha,b]$.

b. La fonction φ est bien définie sur $[\alpha, b]$ (puisque $f' > 0$ sur cet intervalle, *cf.* ci-dessus), elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle avec $\varphi' = \dfrac{f\,f''}{f'^2} \geq 0$. *On a, en effet, $f \geq 0$ sur* $[\alpha, b]$. Donc φ est croissante sur cet intervalle ; comme $\varphi(\alpha) = \alpha$ et

$$\alpha = \varphi(\alpha) \leq \varphi(b) = b - \frac{f(b)}{f'(b)} < b\ ,$$

on déduit que l'intervalle $J = [\alpha, b]$ est stable par φ. il en résulte que la suite (u_n) est bien définie et que tous ses termes se trouvent dans J, cette suite est donc bornée.

Sur J, on a $\varphi(x) \leq x$ (*évident*), donc la suite (u_n) est décroissante. La suite (u_n), décroissante et minorée, converge donc, et sa limite l vérifie $\varphi(l) = l$, soit $f(l) = 0$, donc $l = \alpha$.

c. Notons que $\varphi'(\alpha) = 0$. Posons $C = \max\limits_{t \in J} |\varphi''(t)|$ avec $J = [\alpha, b]$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^3$, alors φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur J, et l'inégalité de Taylor-Lagrange pour φ à l'ordre 1 donne

$$\big|u_{n+1} - \alpha\big| = \big|\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)\big| = \Big|\varphi(u_n) - \big(\varphi(\alpha) + (u_n - \alpha)\,\varphi'(\alpha)\big)\Big| \leq C\,\frac{(u_n - \alpha)^2}{2}\ ,$$

d'où l'inégalité demandée avec $M = \dfrac{C}{2}$.

Suites définies implicitement.

12. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $g_n : x \mapsto \displaystyle\int_n^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel x_n tel que $g_n(x_n) = 1$.

b. Donner un équivalent de (x_n).

c. Soit k un entier naturel. Montrer que l'on a $x_n = n + o\Big(\dfrac{1}{n^k}\Big)$ lorsque $n \to +\infty$.

- -

a. La fonction g_n prend des valeurs négatives sur $]-\infty, n[$ donc ne prend pas la valeur 1 sur cet intervalle. Par ailleurs, elle est continue et strictement croissante sur $[n, +\infty[$ (d'après le théorème fondamental de l'analyse, elle est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée strictement positive puisque $g_n'(x) = e^{x^2}$), elle établit donc une bijection de $[n, +\infty[$ vers son image. Or, $g_n(n) = 0$, et la minoration, valable pour $x \geq n$: $g_n(x) \geq \displaystyle\int_n^x e^t\,\mathrm{d}t = e^x - e^n$ montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = +\infty$. Donc $g_n\big([n, +\infty[\big) = \mathbb{R}_+$. Comme 1 appartient à l'intervalle image, il admet donc un unique antécédent x_n dans $[n, +\infty[$, et finalement dans $\mathbb{R}$.

b. On a déjà $x_n \geq n$ d'après **a.** Notons ensuite que $g_n(n{+}1) = \displaystyle\int_n^{n+1} e^{t^2}\mathrm{d}t \geq e^{n^2} \geq 1 = g_n(x_n)$, donc par croissance de g_n, on déduit que $x_n \leq n + 1$. L'encadrement $n \leq x_n \leq n + 1$ donne immédiatement $x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n$.

c. Soit $k \in \mathbb{N}$, alors $g_n\Big(n + \dfrac{1}{n^{k+1}}\Big) = \displaystyle\int_n^{n+\frac{1}{n^{k+1}}} e^{t^2}\,\mathrm{d}t \geq \int_n^{n+\frac{1}{n^{k+1}}} e^t\,\mathrm{d}t = e^n\,\Big(e^{\frac{1}{n^{k+1}}} - 1\Big)$. En utilisant $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$, on voit que ce minorant est équivalent à $\dfrac{e^n}{n^{k+1}}$ lorsque $n \to +\infty$, donc tend vers l'infini. Pour n assez grand, on a alors $g_n\left(n+\dfrac{1}{n^{k+1}}\right) \geq 1$, donc $n \leq x_n \leq n+\dfrac{1}{n^{k+1}}$ par croissance de la fonction g_n. On en déduit que $x_n - n = o\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$, ce qu'il fallait prouver.

---

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit P_n la fonction polynôme définie par $P_n(x) = x^n + x - 1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n admet une unique racine réelle positive, que l'on notera x_n. Vérifier que $x_n \in]0,1[$. Montrer que la suite (x_n) est croissante. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$ (*indication : pour $\varepsilon > 0$ fixé, on pourra exprimer $P_n(1-\varepsilon)$. Une autre méthode consiste à raisonner par l'absurde en supposant que $l = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \neq 1$*).

- -

On a $P_n'(x) = n\,x^{n-1} + 1$, donc $P_n'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+$, la fonction P_n est **continue et strictement croissante** sur $\mathbb{R}_+$, elle établit donc une **bijection** de $\mathbb{R}_+$ **vers son image** $[-1, +\infty[$. Comme 0 appartient à l'intervalle image, il admet donc un unique antécédent, d'où la présence d'une unique racine réelle positive x_n du polynôme P_n. De $P_n(0) = -1 < 0$ et $P_n(1) = 1 > 0$, on déduit tranquillement que $0 < x_n < 1$.

La fonction P_n est strictement croissante sur $]0,1[$; par ailleurs, pour $x \in]0,1[$ fixé, on a $P_{n+1}(x) < P_n(x)$. En particulier,

$$0 = P_n(x_n) = P_{n+1}(x_{n+1}) < P_n(x_{n+1})$$

et, de la croissance de la fonction P_n, on déduit $x_n < x_{n+1}$: la suite (x_n) est croissante. Comme elle est majorée (par 1), elle est donc convergente.

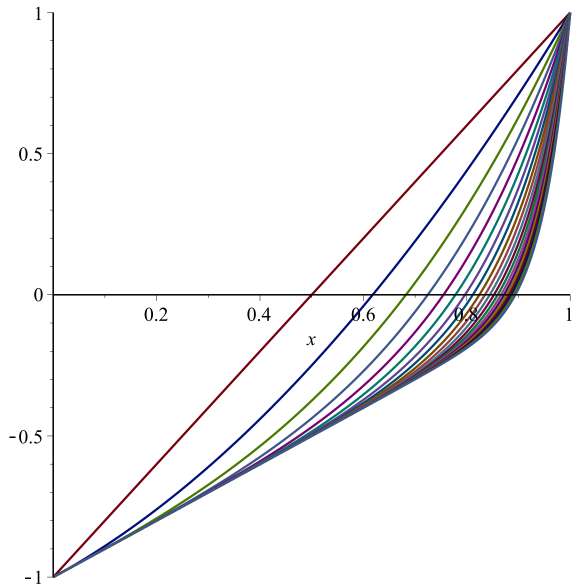
Fixons $\varepsilon > 0$. Alors $P_n(1-\varepsilon) = (1-\varepsilon)^n - \varepsilon \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\varepsilon < 0$. On en déduit que, à partir d'un certain rang, on a $P_n(1-\varepsilon) < 0$, ce qui signifie que $1-\varepsilon < x_n < 1$ (croissance de la fonction P_n). Bilan : on a prouvé

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geq N \Longrightarrow 1 - \varepsilon < x_n < 1\ ,$$

ce qui se traduit par $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Autre méthode: Pour montrer que la limite de la suite est 1, maintenant que l'on sait que la suite (x_n) converge, on peut raisonner par l'absurde en supposant que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$ avec $l \neq 1$. On a alors nécessairement $l \in]0,1[$. Pour tout n, on a $x_n^n = 1 - x_n$ et on a une contradiction en passant à la limite: en effet, le second membre tend vers $1-l$, et le premier terme $x_n^n = e^{n\ln(x_n)}$ tend vers 0 puisque $\ln(x_n) \to \ln(l) < 0$, l'exposant de l'exponentielle tend donc vers $-\infty$. D'où $0 = 1 - l$, soit $l = 1$, ce qui est contradictoire. En conclusion, $l = 1$.

Ce schéma permet de visualiser la suite (x_n).



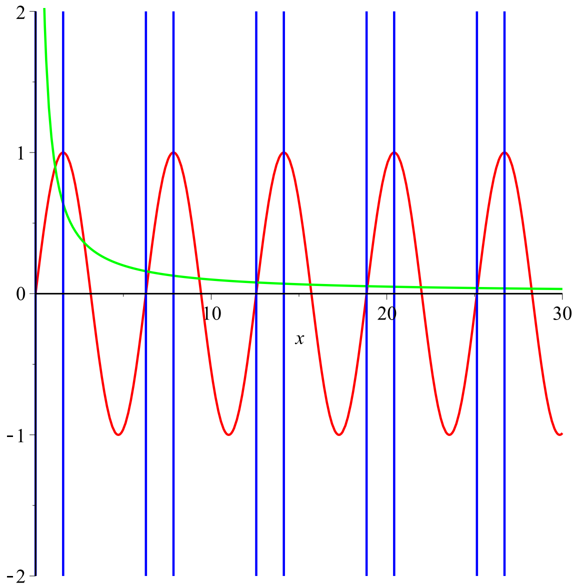
---

14. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\sin x = \dfrac{1}{x}$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle $I_n = \left[2n\,\pi, \left(2n + \dfrac{1}{2}\right)\pi\right]$. Montrer que la suite $(x_n - 2n\pi)$ converge vers zéro en décroissant, donner un équivalent du terme général de cette suite.

- -

L'équation proposée équivaut à $x\,\sin x = 1$. Or, la fonction $f : x \mapsto x\,\sin x$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle I_n (*sa dérivée* $f'(x) = \sin x + x\,\cos x$ *est la somme de deux termes positifs et non simultanément nuls sur* $I_n = \left[2n\pi, 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right]$), elle établit donc une bijection de I_n vers $f(I_n) = \left[f(2n\pi), f\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)\right] = \left[0, 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right]$. Comme le nombre 1 appartient à l'intervalle image, il admet un unique antécédent x_n par f dans I_n.
Posons $y_n = x_n - 2n\pi$; on a alors $y_n \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et, par périodicité de la fonction sinus, $\sin y_n = \sin x_n = \dfrac{1}{x_n}$, on en déduit alors que $y_n = \arcsin\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$. De l'encadrement $2n\pi \leq x_n \leq 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$, on déduit que la suite (x_n) est croissante, puis que la suite $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ est décroissante, puis que la suite $(y_n) = \left(\arcsin \dfrac{1}{x_n}\right)$ est décroissante ; on en déduit aussi que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$; on en déduit même plus précisément que $x_n \sim 2n\pi$, puis que $\dfrac{1}{x_n} \sim \dfrac{1}{2n\pi}$, et enfin que $y_n \sim \dfrac{1}{2n\pi}$ (*en utilisant* $\arcsin x \sim x$ *au voisinage de* 0).
Les x_n *sont certains des points d'intersection de la sinusoïde rouge et de l'hyperbole verte,*

je vous laisse trouver lesquels!



---

15. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = x\,e^x - n$.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n, et montrer qu'elle est strictement positive.

b. Montrer les inégalités $1 \leq u_n \leq \ln(n)$ pour $n \geq 3$.

c. Montrer que $u_n \sim \ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d. Trouver un équivalent de $u_n - \ln(n)$.

- -

a. Soit $f = f_0 : x \mapsto xe^x$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = (x+1)e^x$, donc f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$, strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. Comme f est négative sur $\mathbb{R}_-$, l'équation proposée $f(x) = n$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}_-$. Mais f établit une bijection (continue strictement croissante) de $]0, +\infty[$ vers son image qui est aussi $]0, +\infty[$, donc l'équation proposée admet bien une unique solution réelle u_n, qui appartient à $\mathbb{R}_+^*$.

b. On a $f(1) = e < n = f(u_n)$ dès que $n \geq 3$; comme f est croissante, on en déduit $u_n \geq 1$. De même, $f(\ln n) = (\ln n)\,e^{\ln(n)} = n\,\ln(n) > n = f(u_n)$, donc par la croissance de f, on déduit aussi $u_n \leq \ln(n)$.

c. Pour tout n, on a $u_n\,e^{u_n} = n$, soit **(*)**: $\ln(u_n) + u_n = \ln(n)$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$: en effet, notons g la bijection réciproque de la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$, c'est aussi une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$ donc qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} g(n) = +\infty$. Par croissance comparée, on a donc $\ln(u_n) = o(u_n)$ lorsque

n tend vers $+\infty$. De **(*)**, on déduit alors $u_n \sim \ln(n)$.

d. On a ensuite $u_n - \ln(n) = -\ln(u_n)$. Comme $u_n \sim \ln(n)$, on peut écrire $u_n = (1+\varepsilon_n)\ln(n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. Du coup, $\ln(u_n) = \ln(\ln n) + \ln(1+\varepsilon_n)$, le deuxième terme étant alors évidemment négligeable devant le premier, donc $\ln(u_n) \sim \ln(\ln n)$. Donc

$$u_n - \ln(n) \sim -\ln(\ln n)\ .$$

16.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $x + \ln(x) = n$ admet une unique solution, que l'on notera x_n, dans $\mathbb{R}_+^*$.

b. Montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.

c. Donner un développement asymptotique de x_n avec trois termes non nuls, plus un reste.

- -

a. Soit $f : x \mapsto x + \ln(x)$. Alors f est continue et strictement croissante (comme somme de deux fonctions strictement croissantes) sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f établit une bijection (**théorème de la bijection**) de $\mathbb{R}_+^*$ vers son image. Comme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on a $f(\mathbb{R}_+^*) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$. Donc f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre n a un unique antécédent $x_n = f^{-1}(n)$, la notation f^{-1} représentant ici la bijection réciproque de f.

b. Le théorème de la bijection indique que f^{-1} est aussi une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$. On a donc $\lim\limits_{y\to+\infty} f^{-1}(y) = +\infty$ et, en particulier, $x_n = f^{-1}(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

c. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, on déduit, par croissances comparées, que $n = x_n + \ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$, i.e. le terme $\ln(x_n)$ est négligeable devant le terme x_n. Donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, soit $x_n = n + o(n)$, ce qui donne le premier terme du développement asymptotique qui est l'équivalent. Pour aller plus loin, on doit rechercher un équivalent de la différence. Or,

$$x_n - n = -\ln(x_n) = -\ln\big(n + o(n)\big) = -\ln\Big(n\big(1+o(1)\big)\Big) = -\ln(n) + \ln\big(1+o(1)\big) = -\ln(n) + o(1)\ .$$

On a donc $x_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$, et le développement à deux termes

$$x_n = n - \ln(n) + o\big(\ln(n)\big)\ .$$

Enfin,

$$\begin{aligned} x_n - \big(n - \ln(n)\big) &= (x_n - n) + \ln(n) = -\ln(x_n) + \ln(n) = -\ln\left(\frac{x_n}{n}\right) \\ &= -\ln\left(1 - \frac{\ln n}{n} + o\Big(\frac{\ln n}{n}\Big)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}\ , \end{aligned}$$

ce qui donne le développement asymptotique à trois termes:

$$x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\Big(\frac{\ln(n)}{n}\Big)\ .$$

Autres exercices sur les suites. Ensembles dénombrables.

17. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n^2+u_nv_n+v_n^2\right)=0$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

\- ß

On a d'abord

$$0 \le (u_n+v_n)^2 = u_n^2+2u_nv_n+v_n^2 \le 2\left(u_n^2+u_nv_n+v_n^2\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)^2=0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=0$.

Ensuite, $u_nv_n=(u_n+v_n)^2-(u_n^2+u_nv_n+v_n^2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ensuite, $(u_n-v_n)^2=(u_n+v_n)^2-4u_nv_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$.

Enfin, $u_n=\dfrac{1}{2}\big((u_n+v_n)+(u_n-v_n)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $v_n=\dfrac{1}{2}\big((u_n+v_n)-(u_n-v_n)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

---

18. Théorème de Cesàro

a*. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $v_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k$ (v_n est la moyenne arithmétique des n premiers termes de la suite u). On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l\in\mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=l$.

b. Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=l$ ($l\in\mathbb{R}$). Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{n}=l$.

c. Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=l$ avec $l\in\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_n}=l$.

d. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dbinom{2n}{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

\- -

a. Nous devons prouver l'assertion

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists N\in\mathbb{N}\quad \forall n\in\mathbb{N}\qquad n\ge N \Longrightarrow |v_n-l|\le\varepsilon\ .$$

Notons d'abord que $v_n-l=\dfrac{(u_1-l)+(u_2-l)+\ldots+(u_n-l)}{n}$.

Soit donc $\varepsilon>0$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$, il existe un entier N tel que $|u_k-l|\le\dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout k tel que $k\ge N$. Si n est un entier plus grand que N, on peut écrire

$$v_n-l=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}(u_k-l)+\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}(u_k-l)\ . \qquad \textbf{(*)}$$

On majore directement le second terme de **(*)** en utilisant l'inégalité triangulaire : puisque $|u_k - l| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour $k \geq N$, on a donc
$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^{n} (u_k - l) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^{n} |u_k - l| \leq \frac{1}{n}(n-N)\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} \, .$$
L'entier N ayant été fixé, la quantité $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}(u_k - l)$ est alors une constante (indépendante de la "variable" n) ; le premier terme $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}(u_k - l)$ de **(*)** tend donc vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$ et il est donc en valeur absolue inférieur à $\dfrac{\varepsilon}{2}$ lorsque n est supérieur à un certain entier naturel N'. Pour $n \geq \max\{N, N'\}$, on a alors $|v_n - l| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, ce qu'il fallait démontrer.

b. Nous avons $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (u_n - u_{n-1}) = l$, d'où, en posant
$$v_n = \frac{(u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_n - u_{n-1})}{n} \quad ,$$
nous savons que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n = l$ d'après la question **a**.

Or, par télescopage, $v_n = \dfrac{u_n}{n} - \dfrac{u_0}{n}$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_0}{n} = 0$, d'où $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = l$.

c. Si $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$, alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \big(\ln x_{n+1} - \ln x_n\big) = \ln l$, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln x_n = \ln l$ d'après la question **b**. En prenant enfin l'exponentielle (fonction continue), on obtient $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$.

d. Utilisons la question **c**.

- Avec $x_n = \dbinom{2n}{n}$, nous avons
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\dbinom{2n+2}{n+1}}{\dbinom{2n}{n}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{2\,(2n+1)}{n+1} \text{ qui tend vers } 4 \, ,$$
donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = 4$.

- Avec $x_n = \dfrac{n^n}{n!}$, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ tend vers e, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

---

19. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs. Pour tout n, on pose $y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \cdots + \sqrt{x_n}}}$.

a. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} y_n$ lorsque (x_n) est une suite constante de valeur $a > 0$.

b. Même question lorsque $x_n = a\, b^{2^n}$ avec $a > 0$, $b > 0$.

c*. Montrer que (y_n) converge si et seulement s'il existe un réel positif M tel que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n \leq M^{2^n}$.

- -

Remarque préliminaire. On peut commencer par noter que, dans tous les cas, la suite (y_n) est croissante. Elle est donc convergente si et seulement si elle est majorée.

a. On note la relation de récurrence $y_{n+1} = \sqrt{a + y_n}$. Soit donc la fonction $f : x \mapsto \sqrt{a+x}$ que l'on considère comme allant de $\mathbb{R}_+$ vers lui-même. Cette fonction f admet pour point fixe l'unique racine positive de l'équation $x^2 - x - a = 0$, c'est-à-dire le nombre $l = \dfrac{1}{2} + \sqrt{a + \dfrac{1}{4}}$. Comme f est croissante avec $f(0) = \sqrt{a} > 0$ et $f(l) = l$, le segment $S = [0, l]$ est stable par f. Comme $y_1 = \sqrt{a} \in S$, on a $y_n \in S$ pour tout n, la suite (y_n) est donc majorée, donc convergente d'après la remarque préliminaire. Enfin, la limite de (y_n) est un point fixe de f (car f est continue), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = l = \dfrac{1}{2} + \sqrt{a + \dfrac{1}{4}}$.

b. Notons (y_n) la suite des "radicaux itérés" obtenue avec $x_n = a$ pour tout n et que l'on a étudiée en **a.** Notons (y'_n) la suite obtenue avec $x_n = a\, b^{2^n}$. On voit facilement que $y'_n = b y_n$ pour tout n, donc la suite (y'_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} y'_n = bl = b\left(\dfrac{1}{2} + \sqrt{a + \dfrac{1}{4}}\right)$.

c. Si (x_n) et (x'_n) sont deux suites de réels positifs telles que $x_n \leq x'_n$ pour tout n, alors les suites de radicaux itérés associées vérifient $y_n \leq y'_n$ pour tout n. Donc:

- s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $x_n \leq M^{2^n}$ pour tout n, alors pour tout n, y_n est majoré par le n-ème terme y'_n de la suite de radicaux itérés associée à la suite $(x'_n) = \left(M^{2^n}\right)$. Or, il résulte de **b.** que $\lim\limits_{n\to+\infty} y'_n = M\alpha$ où $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or. La suite (y'_n) étant majorée, il en est alors de même de la suite (y_n), qui est alors convergente d'après la remarque préliminaire.

- si (y_n) converge vers un réel (positif) l, on a facilement, pour tout n, les inégalités

$$x_n^{2^{-n}} \leq y_n \leq l\ .$$

Donc $x_n \leq l^{2^n}$ pour tout n, ce qui donne l'implication réciproque.

---

20. Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dite **sous-additive** si elle vérifie

$$\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \qquad u_{m+n} \leq u_m + u_n\ .$$

a. Pour quels réels α la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $v_n = n^\alpha$ est-elle sous-additive ? Lorsque c'est le cas, déterminer la limite de $\dfrac{v_n}{n}$.

b. Quelles sont les suites réelles $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant $\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad w_{m+n} = w_m + w_n$? Déterminer alors la limite de $\dfrac{w_n}{n}$.

c*. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle sous-additive, on suppose que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ est minorée et on pose $\alpha = \inf\left\{\dfrac{u_n}{n}\ ;\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=\alpha$. *On pourra fixer* $\varepsilon>0$ *et considérer un entier* p *tel que* $\alpha\leq\dfrac{u_p}{p}\leq\alpha+\dfrac{\varepsilon}{2}$, *puis utiliser une division euclidienne.*

- -

a. • Fixons $n\in\mathbb{N}^*$ et considérons $f_n : x\mapsto (x+n)^\alpha - x^\alpha - n^\alpha$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Notons déjà que, si $\alpha<0$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = -n^\alpha<0$ et, si $\alpha>0$, alors $\displaystyle\lim_{x\to 0} f_n(x)=0$.

Ensuite, $f_n'(x)=\alpha\left((x+n)^{\alpha-1}-x^{\alpha-1}\right)$.

On est maintenant armés pour discuter du signe de $f_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- si $\alpha<0$, alors $f_n'>0$ donc f_n est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ avec une limite négative en $+\infty$, donc f_n est négative sur $\mathbb{R}_+^*$;

- si $0<\alpha<1$, alors $f_n'<0$ donc f_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ avec une limite nulle en 0, donc f_n est négative sur $\mathbb{R}_+^*$;

- si $\alpha>1$, alors $f_n'>0$ donc f_n est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ avec une limite nulle en 0, donc f_n est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

En adjoignant à cela les cas $\alpha=0$ et $\alpha=1$ dont l'étude est immédiate, on conclut que la suite (n^α) est sous-additive si et seulement si $\alpha\leq 1$.

• Lorsque $\alpha=1$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n}{n}=1$ et, pour $\alpha<1$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n}{n}=0$.

b. Si $w_{m+n}=w_m+w_n$ pour tout couple $(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$, alors $w_{n+1}=w_n+w_1$ et la suite (w_n) est arithmétique de raison w_1. Avec l'initialisation $w_1=w_1$ (*!*), on déduit que $w_n=n\,w_1$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, et réciproquement une telle suite convient. On a alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{w_n}{n}=w_1$.

c. Soit $\varepsilon>0$. Par définition de la borne inférieure, il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $\alpha\leq\dfrac{u_p}{p}\leq\alpha+\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Pour $n\geq p$, posons la division euclidienne de n par p: on a $n=pq+r$ avec $q\in\mathbb{N}^*$ et $r\in[\![0,p-1]\!]$. La propriété de sous-additivité fournit alors la majoration $u_n\leq q\,u_p+u_r$. Donc

$$\alpha\leq\frac{u_n}{n}\leq\frac{q\,u_p+u_r}{n}\ .$$

Or,

$$\begin{aligned}\frac{q\,u_p+u_r}{n} &= \frac{u_p}{p}+\frac{q\,u_p+u_r}{n}-\frac{u_p}{p}\\ &= \frac{u_p}{p}+\frac{u_r}{n}-\frac{r\,u_p}{np}\\ &\leq \alpha+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{n}\left(u_r-\frac{ru_p}{p}\right)\ .\end{aligned}$$

En posant $M=\displaystyle\max_{0\leq r\leq p-1}\left(u_r-\frac{ru_p}{p}\right)$, on a obtenu l'encadrement $\alpha\leq\dfrac{u_n}{n}\leq\alpha+\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{M}{n}$ pour tout n supérieur à p. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{M}{n}=0$, il existe un rang N à partir duquel $\dfrac{M}{n}\leq\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Pour tout entier n tel que $n \geq \max\{p, N\}$, on a alors $\alpha \leq \dfrac{u_n}{n} \leq \alpha + \varepsilon$. Ceci prouve (*en revenant à la définition de la limite*) que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = \alpha = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{u_n}{n}$.

---

21. Soit (u_n) une suite réelle. On suppose qu'il existe un réel k appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et une suite réelle (r_n) de limite nulle, tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left|u_{n+1}\right| \leq k\,|u_n| + |r_n|\ .$$

On se donne par ailleurs un réel ε strictement positif.

a. Justifier l'existence d'un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|r_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}(1-k)$.

b. Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geq N$, on a $|u_n| \leq k^{n-N}\,|u_N| + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

c. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

- -

a. Résulte immédiatement de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} r_n = 0$ puisque $\dfrac{\varepsilon}{2}(1-k) > 0$.

b. Montrons par récurrence l'inégalité demandée pour tout entier n tel que $n \geq N$.

L'initialisation pour $n = N$ est claire.

Soit n tel que $n \geq N$, supposons que $|u_n| \leq k^{n-N}\,|u_N| + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Comme $|r_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}(1-k)$, on déduit

$$\begin{aligned}
\left|u_{n+1}\right| &\leq k\left(k^{n-N}\,|u_N| + \frac{\varepsilon}{2}\right) + |r_n| \\
&\leq k^{n-N+1}\,|u_N| + k\,\frac{\varepsilon}{2} + (1-k)\,\frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq k^{(n+1)-N}\,|u_N| + \frac{\varepsilon}{2}\ ,
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

c. Le même réel strictement positif ε étant donné, et le même entier N lui étant associé, comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(k^{n-N}\,|u_N|\right) = 0$, il existe un rang N_1 à partir duquel cette expression est majorée aussi par $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geq \max\{N, N_1\}$, on a alors $|u_n| \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

22*. Une suite réelle (a_n) est dite **convexe** si on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \leq \dfrac{a_n + a_{n+2}}{2}$. Elle est dite **concave** si la suite $(-a_n)$ est convexe.

a. Par quelle propriété simple de la suite (d_n), de terme général $d_n = a_{n+1} - a_n$, se traduit la convexité d'une suite réelle (a_n) ? Quelles sont les suites réelles qui sont à la fois convexes et concaves ?

b. Soit (a_n) une suite convexe majorée. Montrer qu'elle est décroissante.

c. Dans cette question, (a_n) est une suite convexe bornée et on pose $d_n = a_{n+1} - a_n$ pour tout n.

i. Montrer que la suite (a_n) est convergente.

ii. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geq 2p$. Prouver les inégalités $2(a_n - a_p) \leq n d_{n-1} \leq 0$.

iii. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} nd_n = 0$.

- -

a. La suite (a_n) est convexe si et seulement si, pour tout n, on a $a_{n+1} - a_n \leq a_{n+2} - a_{n+1}$, soit $d_n \leq d_{n+1}$. La convexité de la suite (a_n) équivaut donc à la croissance de la suite (d_n) et, bien évidemment, la concavité de (a_n) équivaut à la décroissance de la suite (d_n).

La suite (a_n) est convexe et concave à la fois si et seulement si la suite (d_n) est à la fois croissante et décroissante, donc constante. Ceci caractérise les suites arithmétiques.

b. Raisonnons par l'absurde: si (a_n) n'était pas décroissante, il existerait au moins un entier naturel N tel que $a_{N+1} > a_N$. Posons $\delta = a_{N+1} - a_N = d_N$, alors $\delta > 0$, et la croissance de la suite (d_n), prouvée en **a.**, nous apprend que $d_n \geq \delta$ pour tout $n \geq N$, soit $a_{n+1} \geq a_n + \delta$ pour tout $n \geq N$. Une récurrence immédiate donne alors $a_n \geq a_N + (n-N)\delta$ pour tout $n \geq N$, ce qui entraîne $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, ce qui contredit l'hypothèse que (a_n) est majorée.

c. i. La suite (a_n) est décroissante d'après **b.**, et elle est aussi minorée, elle est donc convergente.

ii. Comme la suite (a_n) est décroissante, la suite (d_n) est à valeurs négatives, ce qui donne déjà l'inégalité $nd_{n-1} \leq 0$.

Ensuite, la suite (d_n) étant croissante, écrivons

$$2(a_n - a_p) = 2\sum_{k=p}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = 2\sum_{k=p}^{n-1} d_k \leq 2\sum_{k=p}^{n-1} d_{n-1} = 2(n-p)\,d_{n-1} \leq n\,d_{n-1}\ ,$$

la dernière inégalité résultant du fait que $2(n-p) \geq n$ et $d_{n-1} \leq 0$.

iii. Pour tout $n \geq 2$, posons $p_n = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$, alors $p_n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 2p_n$. Il résulte de **ii.** que l'on a, pour tout $n \geq 2$, l'encadrement $2\,(a_n - a_{p_n}) \leq n\,d_{n-1} \leq 0$. Comme la suite (a_n) admet une limite A, la suite extraite (a_{p_n}) converge aussi vers A, et $\lim_{n\to+\infty}(a_n - a_{p_n}) = A - A = 0$. Par encadrement, on a $\lim_{n\to+\infty} nd_{n-1} = 0$. Par décalage d'indice, $\lim_{n\to+\infty}(n+1)d_n = 0$. Enfin, $\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$, donc par différence, $\lim_{n\to+\infty} nd_n = 0$.

23.a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

b. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ est infini non dénombrable. *On pourra supposer qu'il existe une bijection φ de $\mathbb{N}$ vers $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et chercher une contradiction en considérant l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin \varphi(n)\}$.*

- -

a. L'application $f : \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ définie par $f(A) = \sum_{k\in A} 2^k$ est une bijection. Cela résulte de l'existence (surjectivité) et de l'unicité (injectivité) de l'écriture binaire d'un entier naturel.

b. Supposons qu'il existe une bijection φ de $\mathbb{N}$ vers $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Alors $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin \varphi(n)\}$ est une partie de $\mathbb{N}$, il existe donc un (unique) entier m tel que $A = \varphi(m)$. Cet entier m appartient-il à A ? *Je laisse le lecteur conclure que l'hypothèse de départ est absurde!*