COLLES de MATHÉMATIQUES **PSI2 2023-2024**

Semaine 1 : du 18/09 au 22/09

Révisions sur les suites réelles ou complexes + ensembles dénombrables

Notion de limite, opérations sur les limites. Pour les suites réelles: limites et inégalités, théorème d'encadrement, théorème de la limite monotone, suites adjacentes. Étude de suites réelles récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$. Suites complexes définies par une relation de récurrence linéaire d'ordre deux. Relations de comparaison entre deux suites complexes (domination, négligeabilité, équivalence). Exemples de développements asymptotiques.

Ensembles dénombrables, énumération. Ensembles au plus dénombrables. Exemples de $\mathbf{Z}$, de $\mathbb{N}^2$. Les ensembles $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $[0,1[$ ne sont pas dénombrables. Tout produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Toute partie de $\mathbb{N}$ (ou, plus généralement, d'un ensemble dénombrable) est au plus dénombrable. $\mathbb{Q}$ est dénombrable. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. Toute union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Séries numériques

Notion de convergence (ou divergence) d'une série de nombres réels ou complexes ; sommes partielles. Somme et restes en cas de convergence.

Condition **nécessaire** de convergence : le terme général tend vers zéro. Divergence grossière.

Lien suite-série: la suite (u_n) converge **ssi** la série télescopique associée $\sum(u_n - u_{n-1})$ converge.

Séries à termes positifs : une telle série converge **si et seulement si** ses sommes partielles sont majorées. Exemples des séries géométriques et des séries de Riemann. Critères de comparaison (avec inégalités ou relations de comparaison asymptotique), notamment critère des équivalents. Comparaison à une série de Riemann (règle de Riemann ou "règle $n^\alpha\, u_n$") ou à une série géométrique (règle de d'Alembert).

Comparaison série-intégrale: encadrement de sommes partielles (ou de restes) de séries de la forme $\sum f(n)$ avec f continue et monotone. Application à des recherches d'équivalents.

Séries à termes quelconques : absolue convergence (elle entraîne la convergence). Comparaison: si $u_n = O(v_n)$ avec $v_n \geq 0$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument.

Théorème des séries alternées avec majoration du reste en valeur absolue et signe du reste.

La série exponentielle $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ (rappel à cette occasion de l'inégalité de Taylor-Lagrange).

Définition du produit de Cauchy $\sum c_n$ de deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$. Lorsque les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors leur produit de Cacuhy est une série absolument convergente, et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$. Formule de Stirling.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : I \to I$. Variations de f et comportement de (u_n).
- L'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (ou $[0,1[$) n'est pas dénombrable.
- Si E et F sont dénombrables, alors $E \times F$ est dénombrable.
- Énoncé et preuve de la règle de d'Alembert.
- Développement asymptotique $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
- La convergence absolue entraîne la convergence.
- Énoncé et preuve du théorème spécial des séries alternées.
- La série exponentielle.