SUITES NUMÉRIQUES PSI2 2023-2024

I. Généralités

a. Notations. Opérations.

Une suite est une application u de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Il est d'usage de noter u_n, au lieu de $u(n)$, l'image par u de l'entier naturel n (notation indicée), on dit que u_n est le terme d'indice n de la suite. La suite elle-même sera notée u, ou alors (u_n), ou encore $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Une suite peut être définie à partir d'un certain rang. Notation $(u_n)_{n\geq 1}$ par exemple.

L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si u et v sont deux suites, si α et β sont deux scalaires, on peut définir la combinaison linéaire $\alpha u + \beta v$.

On peut aussi définir une notion de "produit naturel" de deux suites, i.e. une suite uv telle que $(uv)_n = u_n v_n$ pour tout n.

Un autre "produit", appelé **produit de convolution** *ou encore* **produit de Cauchy** *s'avérera utile: on définit la suite parfois notée $u*v$ par* $(u*v)_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{p+q=n} u_p v_q$.

b. Modes de définition

Une suite peut être définie de façon **explicite** (soit $u_n = 2^n$), ou bien de façon **implicite** (pour $n \geq 1$, soit x_n la racine réelle positive du polynôme $X^n + X - 1$), ou bien **par récurrence**.

On admettra à ce sujet que, si $f : E \to E$ est une application (où E est une partie de $\mathbb{K}$, qui est dite alors **stable** par f) et si $a \in E$, il existe une unique suite (u_n) vérifiant $u_0 = a$ (initialisation) et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$. Dans le cas réel, l'étude de ce type de suite définie par une "récurrence simple", notamment de leur monotonie et de leur convergence, fera l'objet d'un TD.

De façon plus générale, si k est un entier naturel non nul, si $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$ sont des scalaires, si $f : \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}$ est une application, il existe une unique suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} u_0 = a_0\ ; \quad u_1 = a_1\ ; \quad \cdots \quad ; \quad u_{k-1} = a_{k-1} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+k} = f(u_n, u_{n+1}, \cdots, u_{n+k-1}) \end{cases}.$$

On dira qu'une telle suite est définie par une récurrence d'ordre k (ou "avec k prédécesseurs"). Les suites définies par une "récurrence double" interviennent dans de nombreuses situations.

On peut aussi définir des suites par "récurrence forte", i.e. on donne u_0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un moyen de calculer u_n si on connaît tous ses prédécesseurs, i.e. $u_0, \cdots, u_{n-1}$.

c. Exemples usuels

- les suites arithmétiques: on passe d'un terme au suivant par l'ajout d'un nombre fixé r, appelé **raison**, on a donc $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout n, d'où une expression explicite $u_n = u_0 + nr$. La relation

$$1 + 2 + \cdots + n \ = \ \sum_{k=1}^{n} k \ = \ \frac{n(n+1)}{2}\ ,$$

à connaître!, permet d'en calculer la somme de termes consécutifs.

- les suites géométriques: on passe d'un terme au suivant par multiplication par un nombre fixé r, aussi appelé **raison**. On a donc $u_{n+1} = r\, u_n$ pour tout n, puis l'expression explicite $u_n = u_0\, r^n$. La relation

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} \ = \ \sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{1 - r^n}{1 - r} \qquad (r \neq 1)$$

permet aussi d'en calculer une somme de termes consécutifs (*"somme partielle d'une série géométrique"*).

Exercice 1: Calcul de $C_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx)$ *et de* $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(kx)$, *pour* x *réel.*

- les suites arithmético-géométriques: elles sont définies par la donnée de leur premier terme u_0 et d'une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = a\,u_n + b$.
Cas particuliers: - si $a = 1$ et $b = 0$, c'est une suite constante ;

- si $a = 0$, la suite est stationnaire (ici constante à partir du rang 1) ;
- si $a = 1$ et $b \neq 0$, la suite est arithmétique de raison b ;
- si $b = 0$ et $a \neq 1$, la suite est géométrique de raison a.

Lorsque $a \neq 1$, l'équation $l = al + b$ admet pour unique solution $l = \dfrac{b}{1-a}$. On notera que ce scalaire l est la valeur de l'unique suite constante vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$. En posant ensuite $v_n = u_n - l$, on s'aperçoit que cette suite (v_n) est géométrique de raison a, d'où $v_n = a^n v_0$, puis une expression explicite (*ne pas l'apprendre par cœur!*) de u_n :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}\ .$$

- les suites définies par une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants

Voici les résultats à connaître sur ce sujet: si a, b, c sont trois nombres complexes avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$, on note $\mathcal{R}$ l'ensemble des suites complexes vérifiant la relation de "récurrence double"

$$(\mathbf{R})\ :\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad a\,u_{n+2} + b\,u_{n+1} + c\,u_n = 0\ .$$

Alors $\mathcal{R}$ est un plan vectoriel, c'est-à -dire un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pour en construire une base, on introduit l'**équation caractéristique (C):** $ar^2+br+c = 0$, qui est une équation polynomiale du second degré. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. Deux cas se présentent:

- si $\Delta \neq 0$, l'équation **(C)** admet deux racines distinctes r_1 et r_2, et une base de $\mathcal{R}$ est constituée des deux suites géométriques (r_1^n) et (r_2^n). On a donc $u_n = A\,r_1^n + B\,r_2^n$;

- si $\Delta = 0$, l'équation **(C)** admet une racine double r_0, et une base de $\mathcal{R}$ est constituée des suites (r_0^n) et $(n\,r_0^n)$. On a donc $u_n = (An + B)\,r_0^n$.

Dans les deux cas, A et B sont des constantes arbitraires que l'on peut déterminer si l'on connaît les deux premiers termes de la suite.

Exemple: la suite de Fibonacci, avec $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, *et* $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

On notera la forte analogie avec l'étude des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants, i.e. les oscillateurs harmoniques.

d. Monotonie et caractère borné (suites réelles)

Une suite réelle (u_n) est dite **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geq u_n$, **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n$; elle est dite **monotone** si elle est, soit croissante, soit décroissante. On parle aussi de suite **strictement croissante**, **strictement décroissante** ou **strictement monotone**.

Concrètement, pour étudier les variations d'une suite (u_n), on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$. On pourra remarquer qu'une suite (u_n) est monotone **si et seulement si** l'expression $u_{n+1} - u_n$ garde un signe constant, cette remarque peut être utile pour les suites récurrentes.

Dans le cas des suites à valeurs strictement positives, on pourra aussi comparer à 1 le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Une suite réelle (u_n) est dite **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$. Elle est dite **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq m$. Elle est dite **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée.

La suite réelle (u_n) est bornée *si et seulement si* la suite $\big(|u_n|\big)$ est majorée.

Traduire avec des quantificateurs la condition: la suite (u_n) n'est pas majorée.

Exercice 2: Soit $f : I \to I$ une application croissante. Soit une suite (u_n) telle que $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite (u_n) est monotone.

e. Cas des suites complexes

Dans le corps $\mathbb{C}$, il n'y a pas de relation d'ordre "intéressante", i.e. compatible avec les opérations usuelles. Il n'y a donc pas de suite croissante, décroissante, minorée ou majorée. On peut toujours dire qu'une suite complexe (u_n) est **bornée** si la suite réelle positive $\big(|u_n|\big)$ est majorée, où $|\cdot|$ représente le module.

Une suite u est dite **stationnaire** si elle est "constante à partir d'un certain rang", i.e.

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \qquad u_{n+1} = u_n \qquad (\text{donc} \quad \forall n \geq N \quad u_n = u_N)\ .$$

II. Notion de limite

C'est bien sûr la notion centrale de ce chapitre, pour ne pas dire de toute l'analyse.

a. Limite finie pour une suite réelle ou complexe

Définition. Soit (u_n) une suite réelle ou complexe, soit l un nombre réel ou complexe. On dit que la suite (u_n) admet pour limite l si on a

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ .$$

Cette assertion très formalisée peut se lire de la façon suivante: si on se donne un réel strictement positif ε (appelons-le "la précision requise"), il existe un rang (le N de la définition) à partir duquel $|u_n - l|$ est majoré par ε. Autrement dit, tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang, se situent dans l'intervalle $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ dans le cas réel, ou dans le disque fermé de centre l et de rayon ε dans le cas complexe.

De façon plus générale, si $\mathcal{P}(n)$ est une assertion (ou "proposition") dépendant d'un entier naturel n, on dira que cette assertion est vraie **à partir d'un certain rang** (en abrégé APCR) s'il existe un entier naturel N tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vrai pour tout $n \geq N$. Cela signifie aussi que l'ensemble $\big\{n \in \mathbb{N} \mid \text{non}\ \mathcal{P}(n)\big\}$ est fini (ou majoré, cela revient au même).

Propriété. Unicité de la limite. Une suite donnée admet au plus une limite.

Autrement dit, une suite donnée ne peut admettre deux limites distinctes. Cela permet, lorsqu'une suite admet une limite l, d'écrire $\lim u_n = l$, ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, ou simplement $u_n \to l$.

Mais ATTENTION! C'est une propriété d'unicité, pas d'existence! De nombreuses suites n'admettent pas du tout de limite, il faut avoir cela à l'esprit. **L'oubli de cette remarque est à l'origine de nombreux raisonnements faux!** Ainsi la négation de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ne peut s'écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq l$ puisque cette dernière écriture reviendrait à sous-entendre l'existence d'une limite, mais autre que l.

Pratique. Pour montrer la convergence d'une suite (u_n) vers un nombre l (en dehors de l'utilisation d'opérations sur les limites), on essaie souvent de majorer la valeur absolue (ou le module) $|u_n - l|$ par quelque chose qui tend vers 0. Cela peut être le cas pour l'étude de suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, où l'on essaie parfois d'obtenir une majoration de la forme $|u_n - l| \leq C\, k^n$ avec $0 < k < 1$ (majoration par une suite géométrique convergente).

Définition. Une suite réelle ou complexe (u_n) est dite **convergente** si elle admet une limite l (finie!), **divergente** sinon.

Proposition. Toute suite convergente est bornée.

La réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple classique $u_n = (-1)^n$.

Exemple des suites géométriques.

Soit u une suite donnée par $u_n = r^n$ avec $r \in \mathbb{C}$. On a alors la discussion suvante:

- si $|r| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$;

- si $|r| > 1$, alors la suite est non bornée donc divergente, en fait $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$;

- si $r = 1$, la suite est constante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$;

- si $|r| = 1$ mais $r \neq 1$, i.e. $r \in \mathcal{U} \setminus \{1\}$, alors la suite est bornée mais divergente.

b. Opérations sur les limites

Les opérations sont essentiellement les **combinaisons linéaires**, **produits** et **quotients**. On a les résultats suivants: si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles ou complexes convergentes, avec $u_n \to l$ et $v_n \to l'$, si α et β sont deux scalaires, alors

$$\alpha\, u_n + \beta\, v_n \to \alpha l + \beta l' \quad ; \qquad u_n\, v_n \to l l' \quad ; \qquad \text{si } l' \neq 0\ ,\ \frac{u_n}{v_n} \to \frac{l}{l'}\ .$$

Une suite complexe (z_n) converge **si et seulement si** les suites réelles (x_n) et (y_n) sont toutes deux convergentes, où l'on a posé $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$. Dans ce cas, on a

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} x_n \ +\ i \lim_{n\to+\infty} y_n\ ,$$

autrement dit $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} z_n\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} z_n\right)$.

Un résultat utile. Si (u_n) est bornée et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) = 0$.

Enfin, il est utile de connaître le résultat suivant concernant l'image d'une suite par une fonction continue:

Proposition. Si (u_n) est une suite à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, et si $f : I \to \mathbb{C}$ est une application, si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ avec $l \in I$, si enfin f est continue au point l, alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$. *La continuité de f au point l pouvant s'écrire $\lim_{x\to l} f(x) = f(l)$, on peut considérer ce résultat comme un cas particulier de composition de limites.*

c. Limite infinie d'une suite réelle.

Dans le cas d'une suite réelle, on envisage aussi le cas d'une limite $-\infty$ ou $+\infty$. Par exemple,

Définition. On dit qu'une suite réelle (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque l'on a

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geq N \Longrightarrow u_n \geq A\ .$$

Cela signifie que, si on se fixe un réel A, on a $u_n \geq A$ à partir d'un certain rang.

On peut alors étendre partiellement les théorèmes d'opérations sur les limites en introduisant le formalisme de la **droite numérique achevée** $\overline{\mathbb{R}}$ (hors programme mais bien pratique!), qui consiste à poser $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et à étendre les opérations (addition et multiplication) de $\mathbb{R}$ hormis quelques cas "indéterminés" comme $(-\infty) + (+\infty)$ ou $0 \times (+\infty)$.

Une petite extension aussi de la propostion en haut de page ("caractérisation séquentielle de la limite"):

Proposition. Si (u_n) est une suite à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, et si $f : I \to \mathbb{R}$ est une application, si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ avec $l \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I (i.e. appartenant à I ou extrémité de I), si enfin f admet une limite $a \in \overline{\mathbb{R}}$ au point l ($\lim_{x\to l} f(x) = a$), alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = a$.

d. Suites extraites

Définition. Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On dit qu'une suite (v_n) est **extraite** de la suite (u_n) s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{\varphi(n)}$.

On peut aussi écrire $v_n = u_{N_n}$, où $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels strictement croissante.

Par exemple les relations $v_n = u_{2n}$, $w_n = u_{2n+1}$, $x_n = u_{n^2}$, $y_n = u_{2^n}$ définissent des suites extraites de la suite (u_n).

Théorème. Si une suite (u_n) admet une limite l (finie ou infinie), alors toute suite extraite de (u_n) admet aussi pour limite l.

Cela résulte essentiellement du fait que, si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors $\varphi(n) \geq n$ pour tout n, donc $\lim_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$. On conclut par une composition de limites.

Ce théorème est surtout utile pour montrer qu'une suite est divergente: en effet, si une suite (u_n) admet deux suites extraites convergeant vers des limites différentes, alors la suite (u_n)

diverge. *Exemples*: $u_n = (-1)^n$ ou $u_n = \cos\left(\dfrac{n^2\pi}{n+1}\right)$.

Proposition. Si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes deux vers une même limite l, alors la suite (u_n) converge vers l.

III. Limites et inégalités (suites réelles)

a. Les théorèmes

Le premier résultat utile concerne le **passage à la limite des inégalités larges** :

Théorème. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles supposées convergentes. Si on a $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Il est évident que les inégalités strictes ne passent pas à la limite.

Il faut toujours avoir à l'esprit que ce théorème ne peut être appliqué que si l'on a préalablement démontré l'existence de limites pour chacune des deux suites.

Les résultats qui suivent, essentiellement différents, sont des **théorèmes d'existence d'une limite**. Tout d'abord, le **théorème de convergence par encadrement**, parfois appelé "théorème des gendarmes":

Théorème. Soient (v_n) et (w_n) deux suites réelles convergeant vers la même limite l. Soit (u_n) une suite réelle telle que $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang. Alors la suite (u_n) est convergente, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Exemple. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$, *avec* $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n\ \cos(nx)}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

Exemple. Soit x un réel. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+\cos(nx)}{n+1}$.

Viennent enfin les **théorèmes de divergence par minoration ou majoration**:

Théorème. Soit (v_n) une suite réelle divergeant vers $+\infty$. Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
De même, une suite (u_n) majorée APCR par une suite (v_n) divergeant vers $-\infty$ tend aussi vers $-\infty$.

Exemple élémentaire: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n}+\cos(n)\right) = +\infty$.

Mentionnons aussi ce résultat découlant immédiatement de la définition de la limite:

Proposition. Si une suite réelle (u_n) admet une limite l strictement positive, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

b. Propriétés de $\mathbb{R}$

Théorème et définition. Soit A une partie de $\mathbb{R}$, non vide et majorée. Alors l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément (un "minimum"), que l'on appelle la **borne supérieure** de la partie A, et que l'on notera $\sup(A)$.

La borne supérieure de A est le plus petit majorant de la partie A. On a donc une caractérisation de la borne supérieure de A par

$$M = \sup(A) \iff \begin{cases} \mathbf{(1)} : & \forall x \in A \quad x \leq M \\ \mathbf{(2)} : & \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad x > M - \varepsilon \end{cases}.$$

L'assertion **(1)** traduit le fait que M est **un** majorant de la partie A. La proposition **(2)** signifie que c'est **le plus petit** majorant (si un réel, ici noté $M-\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$, est strictement inférieur à M, ce n'est pas un majorant de A).

Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée, on définit de même sa **borne inférieure**, notée $\inf(A)$, qui est le plus grand des minorants de A.

Proposition. Soit A une partie de $\mathbb{R}$, non vide et majorée. Alors il existe une suite d'éléments de A qui converge vers $M = \sup(A)$.

En des termes topologiques qui seront introduits ultérieurement, le réel $M = \sup(A)$ est **adhérent** à la partie A, i.e. $\sup(A) \in \overline{A}$.

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $M - \dfrac{1}{n}$ n'est pas un majorant de la partie A, donc il existe un élément de A, que l'on notera x_n, tel que $x_n > M - \dfrac{1}{n}$. On a ainsi construit une suite (x_n) d'éléments de A, et les inégalités $M - \dfrac{1}{n} \leq x_n \leq M$ montrent, par encadrement, que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = M$. $\smile\smile\smile$

De même, si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et non majorée, alors il existe une suite d'éléments de A qui diverge vers $+\infty$. On note parfois $\sup(A) = +\infty$ dans ce cas

Lorsque la borne supérieure M de A appartient à l'ensemble A, on dit que M est le **plus grand élément** de la partie A, ou encore le **maximum** de A, et on note $M = \max(A)$.

Lorsque la borne inférieure m de A appartient à l'ensemble A, on dit que m est le **plus petit élément** de la partie A, ou encore le **minimum** de A, et on note $m = \min(A)$.

Définition. Soit x un réel. Alors l'ensemble $\big\{n \in \mathbf{Z} \mid n \leq x\big\}$ admet un plus grand élément, appelé **partie entière** du réel x, et noté $\lfloor x \rfloor$.

La partie entière de x est donc le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. C'est le seul entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$. On a donc, pour tout réel x, l'encadrement

$$\lfloor x \rfloor \ \leq\ x\ <\ \lfloor x \rfloor + 1\ .$$

On peut définir à partir de là les **approximations décimales** d'un réel x. Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a les inégalités

$$10^{-n}\,\lfloor 10^n\,x \rfloor\ \leq\ x\ <\ 10^{-n}\,\lfloor 10^n\,x \rfloor + 10^{-n}\ ;$$

Les termes extrêmes de cette double inégalité sont les **valeurs décimales approchées** du réel x à la précision 10^{-n} respectivement par défaut et par excès.

Enfin, signalons qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est un **intervalle** *si et seulement si*, pour tous réels a et b dans I avec $a < b$, on a $[a,b] \subset I$. On peut formaliser cela en disant que les intervalles sont les **parties convexes** de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire les parties I vérifiant:

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad \forall t \in [0,1] \qquad (1-t)a + tb \in I\ .$$

c. Suites monotones bornées

De la propriété d'existence d'une borne supérieure pour toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, on déduit le résultat important suivant :

<u>Théorème de la limite monotone.</u> Soit (u_n) une suite réelle, croissante et majorée. Alors cette suite est convergente, et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$, i.e. la limite de la suite (u_n) est la borne supérieure de l'ensemble $U = \{u_n \;;\; n \in \mathbb{N}\}$ des valeurs prises par la suite.

De même, toute suite décroissante minorée converge, et alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Finalement, une suite monotone et bornée est toujours convergente.

Pour être complet sur les suites monotones, signalons aussi que toute suite croissante et non majorée admet pour limite $+\infty$, alors que toute suite décroissante et non minorée admet pour limite $-\infty$.

Définition. Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** lorsque l'on a

(1) : l'une est croissante ;

(2) : l'autre est décroissante ;

(3) : $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

On démontre alors la propriété suivante :

<u>Théorème des suites adjacentes.</u> Si deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles sont toutes deux convergentes, et elles ont la même limite.

En effet, si on suppose (u_n) croissante et (v_n) décroissante, on a facilement, pour tout n, les inégalités

$$u_0 \le u_1 \le \cdots \le u_n \;\le\; v_n \le \cdots \le v_1 \le v_0 \;,$$

d'où l'on déduit que (u_n) est croissante majorée, (v_n) est décroissante minorée, elles sont donc toutes deux convergentes. Enfin, elles ont la même limite grâce à **(3)**. $\smile\smile\smile$

Exemple. Si x est un réel, les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = 10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor$ et $v_n = u_n + 10^{-n}$, autrement dit les valeurs décimales approchées du réel x à la précision 10^{-n} respectivement par défaut et par excès, sont deux suites adjacentes de limite commune x. Le réel x est donc limite d'une suite de nombres décimaux, et a fortiori d'une suite de rationnels.

Exemple des suites dichotomiques. Si on construit deux suites par l'algorithme suivant:

- *initialisation: $x_0 = a$, $y_0 = b$, avec a et b deux réels donnés tels que $a < b$;*
- *pour tout n, suivant le résultat d'un test, on pose, soit* $\begin{cases} x_{n+1} = x_n \\ y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \end{cases}$, *soit* $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \\ y_{n+1} = y_n \end{cases}$.

Alors les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes, et leur limite commune appartient à $[a, b]$.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Pour $n \geq 2$, on pose $a_n = H_{n-1} - \ln n$ et $b_n = H_n - \ln n$. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

IV. Analyse asymptotique

a. Relations de comparaison

Voici un rappel des définitions: si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles ou complexes, la suite (v_n) ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, on dit que:

- (u_n) est **dominée par** (v_n) si le rapport $\frac{u_n}{v_n}$ est borné, on note alors $u_n = O(v_n)$.

- (u_n) est **négligeable devant** (v_n) si le quotient $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers zéro. On note alors $u_n = o(v_n)$. Cela signifie aussi que l'on peut écrire $u_n = v_n\, \varepsilon_n$, où (ε_n) est "un infiniment petit", i.e. une suite de limite nulle.

- (u_n) est **équivalente** à (v_n) si le quotient $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers 1, on note alors $u_n \sim v_n$.

Cette dernière relation est **symétrique** (si $u_n \sim v_n$, alors $v_n \sim u_n$), elle est aussi **réflexive** et **transitive**, c'est une "relation d'équivalence" (HP) dans l'ensemble des suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

Il est utile de noter que $u_n \sim v_n$ peut s'écrire aussi, de façon équivalente, $u_n = v_n(1 + \varepsilon_n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, ou encore $u_n = v_n + o(v_n)$, cette dernière écriture nous rapprochant de l'idée de **développement asymptotique**.

Les relations o et O sont transitives.

Liens logiques entre les relations de comparaison:

$$\big[u_n = o(v_n)\big] \implies \big[u_n = O(v_n)\big]$$

$$\big[u_n \sim v_n\big] \implies \big[u_n = O(v_n) \text{ et } v_n = O(u_n)\big]$$

NB: On peut généraliser un peu ces notions en s'affranchissant de l'hypothèse qu'une des suites ne s'annule pas à partir d'un certain rang, de la façon suivante:

- on dira que (u_n) est **dominée par** (v_n), i.e. $u_n = O(v_n)$ lorsque

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geq N \Longrightarrow |u_n| \leq M\,|v_n|\,.$$

- on dira que (u_n) est **négligeable devant** (v_n), i.e. $u_n = o(v_n)$ lorsque

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geq N \Longrightarrow |u_n| \leq \varepsilon\,|v_n|\,.$$

- on définit toujours l'**équivalence** $(u_n \sim v_n)$ par la condition: $u_n - v_n = o(v_n)$.

Remarque. Soit l un complexe **non nul**. Une suite (u_n) est alors équivalente à l (suite constante) si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

En revanche, une suite est équivalente à 0 si et seulement si elle est stationnaire (nulle à partir d'un certain rang). On évitera donc d'écrire $u_n \sim 0$, pour éviter des confusions.

Règles de manipulation. Les équivalents sont "compatibles" avec les **produits**, les **quotients**, et l'élévation à une **puissance fixée**. Plus précisément, si $u_n \sim \alpha_n$ et $v_n \sim \beta_n$, alors
$u_n v_n \sim \alpha_n \beta_n$ et $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{\alpha_n}{\beta_n}$ (si v_n ne s'annule pas APCR). De plus, si $u_n \sim v_n$ avec $u_n > 0$ et $v_n > 0$, et si α est un réel **fixé**, alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.

Attention!!! Les opérations du type combinaison linéaire (addition, soustraction) avec les équivalents sont **rigoureusement proscrites**. Il est interdit aussi de composer avec une fonction, i.e. $u_n \sim v_n$ n'entraîne pas en général $f(u_n) \sim f(v_n)$.

Exemple. On a $n^2 + n \sim n^2$, *mais pas* $e^{n^2+n} \sim e^{n^2}$ *!!!.*

Exercice 4. On a $2 \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{2}{n}$, $\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right) \sim \dfrac{2}{n}$ *. Donner un équivalent de la différence*

$$x_n = 2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{2}{n}\right).$$

Exercice 5. En utilsant des sommes de Riemann, donner un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

Exercice 6. Donner un équivalent de $u_n = \ln\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)$.

Obtention d'un équivalent par encadrement: Dans le cadre des suites réelles, si $v_n \le u_n \le w_n$ à partir d'un certain rang et si $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim v_n$.

Preuve. C'est une conséquence immédiate du théorème d'encadrement dit "des gendarmes".

Propriétés conservées par équivalence:

- si deux suites sont équivalentes et si l'une d'elles admet une limite (finie ou infinie), alors l'autre admet la même limite.

- si deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont équivalentes, alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

Exercice 7. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$. *Montrer que* $S_n \sim n!$

b. Croissances comparées

Sont à connaître les résultats suivants concernant les suites usuelles: si $\beta > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, on a alors, lorsque $n \to +\infty$, les comparaisons $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$ et $n^\alpha = o(e^{\gamma n})$.

Cette dernière comparaison s'écrit aussi, par un changement de notation (poser $r = e^\gamma$):

si $\alpha > 0$ et $r > 1$, on a $n^\alpha = o(r^n)$

(comparaison d'une "suite puissance" et d'une suite géométrique).

Exercice 8. Soit $r > 1$. *Montrer que* $r^n = o(n!)$ *et* $n! = o(n^n)$. *Pour cela, on pourra montrer que, si une suite* (a_n) *de réels strictement positifs est telle que* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to l$ *avec* $0 \le l < 1$, *alors* $a_n \to 0$.

c. Notion de développement asymptotique

Un développement asymptotique d'une expression (ici le terme général d'une suite) est une écriture de cette expression comme une somme de plusieurs termes, chacun étant négligeable devant ceux qui le précèdent. Cette écriture se termine éventuellement par un reste sous la forme $o(\alpha_n)$, où α_n est une expression simple.

Par exemple, du développement limité à l'ordre 3 de $\ln(1+x)$ *au voisinage de 0, on peut déduire le développement asymptotique*

$$\ln\Big(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n\sqrt{n}}+o\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big)\ .$$

Exercice 9. Donner un développement asymptotique à trois termes de $u_n=\ln(n^2+1)$.

Exercice 10. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(n\,\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Bien entendu, il est indispensable de connaître les développements limités des fonctions usuelles!

V. Ensembles dénombrables

a. Les entiers naturels

Nous admettrons tout d'abord deux propriétés de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels:

Propriété 1. Toute partie de $\mathbb{N}$ non vide admet un plus petit élément (ou "minimum").

Propriété 2. Toute partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée admet un plus grand élément (ou "maximum").

Exemple. Un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dit **nilpotent** s'il existe au moins un entier naturel k tel que $u^k=0$. L'ensemble $A=\{k\in\mathbb{N}\mid u^k=0\}$ est alors une partie de $\mathbb{N}$ non vide, elle admet donc un plus petit élément $p=\min(A)$, que l'on nomme **indice de nilpotence** de u. Un exercice classique d'algèbre linéaire consiste à prouver que, si $\dim(E)=n<+\infty$, alors cet indice p vérifie $p\leq n$, autrement dit $u^n=0$.

On a par ailleurs, de façon évidente:

Proposition. Une partie de $\mathbb{N}$ est majorée si et seulement si elle est finie.

b. Principe de récurrence.

Voici un premier énoncé:

Soit A une partie de $\mathbb{N}$ telle que

- **initialisation:** $0\in A$ **;**
- **hérédité:** $\forall n\in\mathbb{N}\quad n\in A\Longrightarrow n+1\in A$**.**

Alors $A=\mathbb{N}$.

En effet, soit $B = \mathbb{N} \setminus A$. Si on suppose B non vide, il admet un plus petit élément m par la propriété 1. On ne peut avoir $m = 0$ grâce à l'initialisation. Donc $m \in \mathbb{N}^*$, et m admet un prédécesseur $m-1$ qui appartient à $A = \mathbb{N} \setminus B$ vu la définition de m comme plus petit élément de B. La propriété d'hérédité donne alors $m = (m-1)+1 \in A$, ce qui est absurde. Finalement, $B = \emptyset$ et $A = \mathbb{N}$. $\smile\smile\smile$

On applique souvent ce principe à l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On parle alors de **démonstration par récurrence** de l'assertion $\mathcal{P}(n)$.

NB: Attention! $\mathcal{P}(n)$ doit être une assertion dépendant d'une variable "libre" n décrivant l'ensemble $\mathbb{N}$. Par exemple, si $u = (u_n)$ est une suite réelle, l'assertion $\mathcal{A}$: "la suite (u_n) est croissante" ne contient pas n comme "variable libre" et ne peut donc être notée $\mathcal{A}(n)$. En revanche, l'assertion $\mathcal{P}(n)$: "$u_{n+1} \geq u_n$" contient n comme variable libre, et est susceptible d'être prouvée par récurrence.

On admet aussi la possibilité de **définir** des objets **par récurrence**, *cf.* paragraphe **I.b.** sur les modes de définition d'une suite.

Il existe plusieurs variantes, notamment:

Récurrence double

Soit A une partie de $\mathbb{N}$ telle que

- **initialisation:** $0 \in A$ **et** $1 \in A$ **;**
- **hérédité:** $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \in A \text{ et } n+1 \in A) \Longrightarrow n+2 \in A$**.**

Alors $A = \mathbb{N}$.

Récurrence forte

Soit A une partie de $\mathbb{N}$ telle que

- **initialisation:** $0 \in A$ **;**
- **hérédité:** $\forall n \in \mathbb{N} \quad [\![0, n]\!] \subset A \Longrightarrow n+1 \in A$**.**

Alors $A = \mathbb{N}$.

Des suites peuvent aussi être définies par une récurrence double, ou par une récurrence forte.

c. Ensembles dénombrables

Définition. Un ensemble E est dit **dénombrable** s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ vers E.

Commentaires. Si $\varphi : \mathbb{N} \to E$ est une bijection, en notant $x_n = \varphi(n)$, on a donc

$$E = \{x_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\} \; ,$$

ainsi E est l'ensemble des valeurs d'une suite **injective**, i.e. telle que $m \neq n \Longrightarrow x_m \neq x_n$. Une telle écriture est appelée une **énumération** de l'ensemble E.

On s'intéressera aussi dans ce paragraphe aux ensembles **finis ou dénombrables** (dont la définition tombe sous le sens), que l'on nomme aussi ensembles **au plus dénombrables**.

Un tel ensemble E peut alors être décrit en extension sous la forme $\{x_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$, où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite non nécessairement injective.

__Exemples.__ Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ sont dénombrables (évident). **L'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs est dénombrable.**

En effet, on peut "énumérer" les entiers relatifs en prenant alternativement un entier positif, puis un entier négatif, etc., donc en les prenant dans l'ordre suivant:

$$0,\ -1,\ 1,\ -2,\ 2,\ -3,\ 3,\ -4, \cdots$$

Pour ceux qui aiment les constructions explicites, l'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbf{Z}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \varphi(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } \ n \text{ est impair} \end{cases}$$

est une bijection, la bijection réciproque étant $\varphi^{-1} : \mathbf{Z} \to \mathbb{N}$ telle que

$$\forall k \in \mathbf{Z} \qquad \varphi^{-1}(k) = \begin{cases} 2k & \text{si } \ k \geq 0 \\ -2k-1 & \text{si } \ k < 0 \end{cases} .$$

__Exemple.__ **L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.**

On peut en effet énumérer les couples d'entiers naturels par un "balayage diagonal", de la façon suivante:

$$(0,0),\ \text{puis}\ (1,0),(0,1),\ \text{puis}\ (2,0),(1,1),(0,2),\ \text{puis}\ (3,0),(2,1),(1,2),(0,3),\ \text{etc.}$$

Ici aussi, il est possible d'expliciter la bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ ainsi construite, mais il est plus facile d'expliciter la réciproque φ^{-1} qui est donnée par

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \qquad \varphi^{-1}(p,q) = q + \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} .$$

En effet, le couple (p,q) est le $(q+1)$-ième considéré dans sa diagonale (parallèle à la seconde bissectrice), et il faut numéroter préalablement tous les couples (k,l) avec $k+l < p+q$, il y en a $\displaystyle\sum_{i=1}^{p+q} i = \frac{(p+q)(p+q+1)}{2}$, et enfin décaler d'une unité puisque la numérotation commence à 0. Je ne démontrerai pas formellement que l'on a bien ainsi construit une bijection de $\mathbb{N}^2$ vers $\mathbb{N}$.

__Conséquence.__ **Si E et F sont des ensembles dénombrables, il en est de même de leur produit cartésien $E \times F$.**

Il existe en effet une bijection $u : \mathbb{N} \to E$ et une bijection $v : \mathbb{N} \to F$. Pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, posons $\varphi(p,q) = \big(u(p), v(q)\big)$, on définit ainsi une application φ de $\mathbb{N}^2$ vers $E \times F$, et il est facile de vérifier qu'elle est bijective. Détaillons:

- soit $(x,y) \in E \times F$, alors comme u et v sont surjectives, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u(p) = x$, et il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $v(q) = y$, on en déduit que $\varphi(p,q) = (x,y)$, d'où le caractère surjectif de l'application φ.

- soient (p,q) et (p',q') deux couples d'entiers naturels tels que $\varphi(p,q)=\varphi(p',q')$, on a alors $u(p)=u(p')$ et $v(q)=v(q')$. Comme u et v sont injectives, il résulte que $p=p'$ et $q=q'$, soit $(p,q)=(p',q')$. On a donc prouvé le caractère injectif de φ.

Enfin, comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, il existe une bijection $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$. L'application composée $\varphi \circ \psi$ est alors une bijection de $\mathbb{N}$ vers $E \times F$, ce qui termine la démonstration.

De façon plus générale, tout produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est encore dénombrable.

Exemple. L'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\{0,1\}$ n'est pas dénombrable.

Supposons en effet qu'il existe une énumération de cet ensemble: $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{s^{(n)}\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ où, pour tout n entier naturel, $s^{(n)}$ représente la suite $\left(s_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $s_k^{(n)} \in \{0,1\}$ pour tout k. Considérons alors la suite $u=(u_k) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ donnée par $u_k = 1 - s_k^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Cette suite u ne fait pas partie de l'énumération précédente puisque, si n est un entier naturel, le terme d'indice n de la suite u ne coïncide pas avec celui de la suite $s^{(n)}$, en effet $u_n = 1 - s_n^{(n)} \neq s_n^{(n)}$ puisque $s_n^{(n)} \neq \dfrac{1}{2}$. On a donc obtenu une contradiction.

Proposition. Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Soit A une partie infinie de l'ensemble $\mathbb{N}$. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to A$ définie par $\varphi(0)=\min(A)$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \varphi(k) = \min\Big(A \setminus \big\{\varphi(0),\cdots,\varphi(k-1)\big\}\Big)\ .$$

Nous allons montrer que φ est une bijection de $\mathbb{N}$ vers A.

• D'abord φ est bien définie: comme A est une partie de $\mathbb{N}$ non vide, elle admet un minimum d'où l'existence de $\varphi(0)$. Puis, par récurrence forte, pour $k \in \mathbb{N}^*$, si $\varphi(0)$, $\cdots$, $\varphi(k-1)$ existent, alors $A \setminus \big\{\varphi(0),\cdots,\varphi(k-1)\big\}$ est encore une partie de $\mathbb{N}$ non vide, d'où l'existence de $\varphi(k)$.

• Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(k) \notin \big\{\varphi(0),\cdots,\varphi(k-1)\big\}$ par construction, d'où l'injectivité de φ.

• Posons $B_k = A \setminus \big\{\varphi(0),\cdots,\varphi(k-1)\big\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $B_0 = A$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(k)=\min(B_k)$. De $B_{k+1} \subset B_k$, on déduit immédiatement l'inégalité $\varphi(k+1) \geq \varphi(k)$ et, de l'injectivité de φ, on déduit que cette inégalité est stricte. L'application φ est donc strictement croissante.

• On déduit par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N} \quad \varphi(k) \geq k$.

• Il reste à montrer le caractère surjectif de φ. Soit $x \in A$, posons $E = \big\{k \in \mathbb{N} \mid \varphi(k) \leq x\big\}$. Alors E est une partie de $\mathbb{N}$, non vide car $\varphi(0)=\min(A) \leq x$ donc $0 \in E$, et majorée car $E \subset [\![0,x]\!]$ d'après le point précédent. Elle admet donc un maximum $M=\max(E)$.
Comme $M \in E$, on a $\varphi(M) \leq x$ et, comme $M+1 \notin E$, on a $\varphi(M+1) > x$.
Si on avait $\varphi(M) < x$, alors $x \in B_{M+1} = A \setminus \big\{\varphi(0),\cdots,\varphi(M)\big\}$, donc $x \geq \min(B_{M+1}) = \varphi(M+1)$, ce qui est contradictoire. On a finalement $x=\varphi(M)$. On a prouvé que tout élément de A admet un antécédent par φ.

Conséquence. Toute partie de $\mathbb{N}$, ou plus généralement toute partie d'un ensemble dénombrable, est au plus dénombrable.

__Conséquence.__ **L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable.**

Déjà cet ensemble est infini puisqu'il contient $\mathbb{N}$. De plus, tout nombre rationnel r admet une unique écriture irréductible $r = \dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Soit l'ensemble $E = \{(a,b) \in \mathbf{Z} \times \mathbb{N}^* \mid a \wedge b = 1\}$. Cet ensemble est une partie infinie de l'ensemble dénombrable $\mathbf{Z} \times \mathbb{N}^*$, il est donc lui aussi dénombrable. Comme $f : E \to \mathbb{Q}$, $(a,b) \mapsto \dfrac{a}{b}$ est une bijection, on déduit que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

__Conséquence.__ **L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est infini non dénombrable.**

Tout réel x de l'intervalle $I = [0,1[$ admet un unique développement décimal propre:
$x = 0,\overline{a_1 a_2 \cdots} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$, *les a_k étant des entiers de l'intervalle $[\![0,9]\!]$, non tous égaux à 9 à partir d'un certain rang. Par une démonstration analogue à celle faite pour $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, on déduit que l'ensemble $[0,1[$ est infini non dénombrable. Comme $\mathbb{R}$ contient $[0,1[$, il est lui aussi infini non dénombrable.*

__Conséquence.__ **Un ensemble E est au plus dénombrable s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il peut être décrit en extension sous la forme $E = \{x_i \,;\, i \in I\}$ avec I une partie de $\mathbb{N}$, et les x_i distincts.**

__Propriété__. **Toute union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.**

Idée de preuve, dans le cas d'une réunion disjointe. Considérons une union dénombrable disjointe $E = \displaystyle\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$ d'ensembles E_i supposés tous dénombrables. Énumérons chaque E_i sous la forme $E_i = \{x_i^{(n)} \,;\, n \in \mathbb{N}\}$. On a alors $E = \{x_i^{(n)} \,;\, (i,n) \in \mathbb{N}^2\}$. L'application $\varphi : \mathbb{N}^2 \to E$ définie par $\varphi(i,n) = x_i^{(n)}$ est alors une bijection de $\mathbb{N}^2$ vers E et, comme on a prouvé que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, il en est de même de E.

UN PROBLÈME

Dans ce problème, on considère un segment $S = [a,b]$ de $\mathbb{R}$, et on note $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On posera $I = \displaystyle\int_S f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

On fixe un entier naturel n non nul et on subdivise le segment S en n parties égales. Les points de subdivision sont alors les a_k $(0 \leq k \leq n)$, avec $a_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$.

Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose aussi $c_k = a + (2k+1)\dfrac{b-a}{2n} = \dfrac{a_k + a_{k+1}}{2}$ le milieu du segment $[a_k, a_{k+1}]$, parfois appelé **point médian**.

On introduit enfin les trois sommes suivantes, qui sont les valeurs approchées de l'intégrale I respectivement par:

- la méthode des rectangles avec point initial,

- la méthode des rectangles avec point médian,

- la méthode des trapèzes:

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\ ; \qquad R'_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\ ; \qquad T_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\ .$$

1. Montrer l'existence de $M_1 = \max_{t\in S} \big|f'(t)\big|$ et de $M_2 = \max_{t\in S} \big|f''(t)\big|$.

2. Étude de la méthode des rectangles avec point initial

a. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, soit $t \in [a_k, a_{k+1}]$. Prouver la majoration $\big|f(t) - f(a_k)\big| \leq M_1\,(t - a_k)$.

b. En déduire une majoration de $\left| \displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\,f(a_k)\right|$.

c. En déduire la majoration

$$\big|I - R_n(f)\big| \leq M_1\,\frac{(b-a)^2}{2n}\ .$$

3. Étude de la méthode des rectangles avec point médian

a. Dans cette question préliminaire, on note c un réel, α un réel strictement positif, et $g : [c-\alpha, c+\alpha] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On pose $M = \max_{t\in[c-\alpha,c+\alpha]} \big|g''(t)\big|$.

Pour tout réel $x \in [0, \alpha]$, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_{c-x}^{c+x} g(t)\,\mathrm{d}t - 2x\,g(c)$.

i. Montrer que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, \alpha]$, et donner les expressions de $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ pour $x \in [0, \alpha]$.

ii. Prouver la majoration

$$\forall x \in [0, \alpha] \qquad \big|\varphi''(x)\big| \leq 2M\,x\ .$$

iii. En déduire que $\big|\varphi'(x)\big| \leq M\,x^2$, puis que $\big|\varphi(x)\big| \leq M\,\dfrac{x^3}{3}$ pour $x \in [0, \alpha]$.

b. En utilisant le **a.**, prouver la majoration

$$\big|I - R'_n(f)\big| \leq M_2\,\frac{(b-a)^3}{24\,n^2}\ .$$

4. Étude de la méthode des trapèzes

a. Soit c un réel, soit α un réel strictement positif, soit $g : [c, c+\alpha] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, soit enfin $M = \max_{t\in[c,c+\alpha]} \big|g''(t)\big|$.

Pour tout réel $x \in [0, \alpha]$, on pose $\psi(x) = \displaystyle\int_{c}^{c+x} g(t)\,\mathrm{d}t - x\,\frac{g(c)+g(c+x)}{2}$. En suivant une démarche analogue à celle de la question **3.a.**, prouver la majoration $\big|\psi(x)\big| \leq M\dfrac{x^3}{12}$ pour $x \in [0, \alpha]$.

b. En déduire la majoration $\big|I - T_n(f)\big| \leq M_2\,\dfrac{(b-a)^3}{12\,n^2}$.

5. Comparaison des méthodes

Comparer les performances des différentes méthodes d'intégration numérique étudiées ci-dessus.