SÉRIES NUMÉRIQUES **PSI2 2023-2024**

I. Généralités

1. Introduction par des exemples.

- **Exemple 1.** Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons $u_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

  Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ et intéressons-nous à la convergence de la suite (S_n).

  On note ici que $u_k = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, donc "par télescopage", $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il est alors immédiat que la suite (S_n) converge et a pour limite 1, i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} u_k\Big) = 1 \ .$$

  On dit alors que **la série de terme général u_k converge**, et a pour **somme** le réel $S = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$. On notera alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1$.

- **Exemple 2.** Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons $u_k = \dfrac{1}{k^2}$.

  Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Ici, on ne peut expliciter plus $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, mais on peut montrer que la suite (S_n) converge. Cette suite (S_n) est évidemment croissante (on ajoute successivement des termes positifs), et elle est majorée car (en utilisant l'exemple 1 ci-dessus):

$$S_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2 \ .$$

  La suite (S_n) est donc convergente. Ici aussi, on dira que **la série de terme général u_k converge**. Toutefois, expliciter sa **somme** $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n$ est plus difficile.

- **Exemple 3.** Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons $u_k = \dfrac{1}{k}$.

  Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Ici, on ne peut pas expliciter $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ non plus, mais on peut montrer que la suite (S_n) diverge. Cette suite (S_n) est ici aussi croissante, mais il est facile de montrer (*exercice laissé au lecteur*) que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k) \ .$$

  On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n \geq \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) = \ln(n+1) \ .$$

  Par minoration, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, on déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. On dit alors que **la série de terme général u_k diverge**.

- **Exemple 4 (à traiter en exercice).** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $u_k = \Big(-\dfrac{2}{3}\Big)^k$.

  Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Expliciter S_n pour tout n. En déduire la convergence de la série de terme général u_k, et calculer sa somme.

2. Le vocabulaire.

Soit k_0 un entier naturel, soit $(u_k)_{k\geq k_0}$ une suite de nombres réels ou complexes, définie à partir du rang k_0. On lui associe une deuxième suite $(S_n)_{n\geq k_0}$, elle aussi définie à partir du rang k_0, par la relation

$$\forall n \geq k_0 \qquad S_n = \sum_{k=k_0}^{n} u_k \ .$$

On dit alors que **la série de terme général** u_k, avec $k \geq k_0$, **converge** si la suite (S_n) converge. Dans le cas contraire, on dit que **la série de terme général** u_k **diverge**.

Pour tout n, le nombre $S_n = \sum\limits_{k=k_0}^{n} u_k$ est appelé **somme partielle d'ordre** n de la série étudiée.

En cas de convergence, le nombre $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ est appelé **la somme** de la série étudiée, et on le note $S = \sum\limits_{k=k_0}^{+\infty} u_k$. Ainsi, on a $\sum\limits_{k=k_0}^{+\infty} u_k = \lim\limits_{n\to+\infty} \Big(\sum\limits_{k=k_0}^{n} u_k \Big)$.

Toujours en cas de convergence, pour tout entier n supérieur ou égal à k_0, on posera $R_n = S - S_n$, et ce nombre R_n est appelé **reste d'ordre** n de la série. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$, ce qui est une propriété à retenir:

Le reste d'ordre n d'une série convergente tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Remarque 1. Dans ce qui précède, j'ai défini des locutions comme: "la série converge", "la série a pour somme S", mais je n'ai pas vraiment donné de définition du mot **série**. Eh bien, je n'en donnerai pas! Certains ouvrages présentent une série comme étant un couple de suites, ici en l'occurrence $\big((u_k), (S_n)\big)$, mais je trouve cela très dogmatique et de bien peu d'intérêt. Je me contenterai de dire que "étudier une série", c'est étudier une suite mais de façon différente puisqu'on ne s'intéresse pas au comportement du terme général u_k de la suite elle-même, mais au comportement des "valeurs cumulées", c'est-à-dire des **sommes partielles** $S_0 = u_0$, $S_1 = u_0 + u_1$, $S_2 = u_0 + u_1 + u_2$, ... (si la suite est définie à partir du rang 0).

Remarque 2. Il est un peu long d'écrire "la série de terme général u_k avec $k \geq k_0$", c'est pourquoi cette série est représentée par la notation $\sum\limits_{k\geq k_0} u_k$, ou simplement $\sum u_k$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. Attention à ne pas confondre cette notation (qui représente "la série" en tant qu'objet d'étude) avec l'écriture $\sum\limits_{k=k_0}^{+\infty} u_k$ qui, elle, représente **la somme** de la série (qui est un nombre réel ou complexe) en cas de convergence.

Remarque 3. Si la série $\sum\limits_{k\geq k_0} u_k$ converge et a pour somme S, et si n est un entier naturel supérieur ou égal à k_0, alors la série $\sum\limits_{k\geq n+1} u_k$ converge aussi et a pour somme $S - \sum\limits_{k=k_0}^{n} u_k$.

En effet, pour tout entier p supérieur à n, on a $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} u_k = \sum_{k=k_0}^{p} u_k - \sum_{k=k_0}^{n} u_k$, *et il suffit de faire tendre p vers l'infini.* Le reste d'ordre n de la série $\displaystyle\sum_{k\geq k_0} u_k$ est alors

$$R_n = S - S_n = \lim_{p\to+\infty} \Big(\sum_{k=k_0}^{p} u_k - \sum_{k=k_0}^{n} u_k \Big) = \lim_{p\to+\infty} \Big(\sum_{k=n+1}^{p} u_k \Big) .$$

Le reste d'ordre n d'une série convergente $\displaystyle\sum_{k\geq k_0} u_k$ peut donc s'écrire sous les deux formes suivantes:

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k .$$

Remarque 4. En dehors de quelques exemples classiques (séries géométriques, séries télescopiques), il est très rare que l'on puisse expliciter une forme close (sans utilisation du symbole $\sum$) pour les sommes partielles d'une série. L'étude de la **nature** d'une série (convergence ou divergence) se fera la plupart du temps par comparaison avec des séries "de référence" en utilisant des inégalités (séries à termes réels positifs) ou des comparaisons asymptotiques (o, O, équivalents), ou en utilisant des théorèmes (séries alternées).

3. Propriétés élémentaires.

Dans tout ce qui suit, on supposera que $k_0 = 0$, autrement dit la sommation commence à l'indice 0. Le lecteur adaptera dans les exemples qui ne satisfont pas cette condition.

a. Linéarité de la somme.

Proposition. Soit E l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que la série associée $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ soit convergente. Alors E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. De plus, l'application

$$\sigma : \begin{cases} E & \to \mathbb{K} \\ u = (u_n) & \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{cases}$$

est une forme linéaire sur E. On dit parfois abusivement que E est l'espace vectoriel des séries convergentes.

Preuve: Soit $u \in E$ et $v \in E$, soit $\alpha \in \mathbb{K}$ un scalaire. Soient les sommes $S = \sigma(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $T = \sigma(v) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. On a alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} u_k\Big) = S$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} v_k\Big) = T$. Or, pour tout n,

$$\sum_{k=0}^{n} (\alpha u_k + v_k) = \alpha \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k .$$

Par opérations sur les suites convergentes, on déduit que $\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}(\alpha u_k+v_k)\Big)=\alpha S+T$, *donc la série de terme général* αu_k+v_k *converge et a pour somme* $\alpha S+T$. *En d'autres termes, on a montré que* $\alpha u+v\in E$ *et* $\sigma(\alpha u+v)=\alpha\,\sigma(u)+\sigma(v)$, *ce qu'il fallait prouver.*

On retiendra notamment de cela que "**convergente+convergente=convergente**", i.e. si $w_n=u_n+v_n$ avec $\sum u_n$ et $\sum v_n$ toutes deux convergentes, alors la série $\sum w_n$ converge aussi.

On notera aussi que "**convergente+divergente=divergente**", i.e. si $w_n=u_n+v_n$ avec $\sum u_n$ convergente et $\sum v_n$ divergente, alors la série $\sum w_n$ diverge: *en effet, si ce n'était pas le cas, en écrivant* $v_n=w_n-u_n$ *avec* $\sum w_n$ *et* $\sum u_n$ *toutes deux convergentes, on déduirait la convergence de* $\sum v_n$, *ce qui est contradictoire.*

Attention! Si le terme général u_n d'une série convergente se décompose en une somme $u_n=x_n+y_n$, il est possible que les séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ soient toutes deux divergentes. Des exemples viendront par la suite.

Conséquence. Une série à termes complexes $\sum z_n$ converge si et seulement si les séries $\sum \mathrm{Re}(z_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(z_n)$ sont toutes deux convergentes. On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Re}(z_n)+i\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Im}(z_n)\ ,$$

i.e. la partie réelle de la somme est la somme des parties réelles, et idem pour les parties imaginaires. *Démonstration détaillée laissée au lecteur.*

b. Condition nécessaire de convergence.

Proposition. Si une série converge, alors son terme général tend vers 0.

Preuve: Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série convergente, soit* S *sa somme. Notons* S_n *la somme partielle d'ordre* n. *Pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$, *on a* $u_n=S_n-S_{n-1}$. *Comme* S_n *et* S_{n-1} *tendent tous deux vers* S, *on déduit que* $\lim_{n\to+\infty}u_n=S-S=0$.

Attention! La condition N'EST PAS SUFFISANTE! On peut imaginer de nombreux contre-exemples:

- exemple 3 de l'introduction avec $u_k=\dfrac{1}{k}$ pour $k\in\mathbb{N}^*$. On a bien $\lim_{k\to+\infty}\dfrac{1}{k}=0$, mais la série de terme général $\dfrac{1}{k}$ diverge.
- soit $u_k=\ln(k+1)-\ln(k)=\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$ pour $k\in\mathbb{N}^*$. On a bien $\lim_{k\to+\infty}u_k=0$, mais la série $\sum u_k$ diverge puisque ses sommes partielles $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\ln(n+1)$ divergent.

Une série dont le terme général ne tend pas vers zéro est dite **grossièrement divergente**. Cela entraîne bien sûr sa divergence, mais ce n'est pas équivalent.

c. Exemple des séries géométriques.

Soit r un nombre complexe, posons $u_k = r^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} r^k$ pour tout n entier naturel.

• si $r = 1$, alors $u_k = 1$ pour tout k, la série géométrique $\sum r^k$ diverge donc (grossièrement) ;

• si $r \neq 1$, on connaît la formule $S_n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$, soit encore $r^{n+1} = 1 - (1 - r)S_n$.

On en déduit que la série géométrique $\sum r^k$ converge si et seulement si la suite géométrique (r^{n+1}) converge (*et c'est alors vers zéro*), c'est-à-dire si et seulement si $|r| < 1$.

Bilan: La série géométrique $\sum r^k$ converge si et seulement si $|r| < 1$. Dans ce cas, sa somme vaut

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \qquad \big(|r| < 1\big)\ .$$

Noter que, si $|r| < 1$, on peut aussi expliciter les restes de la série géométrique puisqu'alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad R_n = S - S_n = \frac{1}{1-r} - \frac{1 - r^{n+1}}{1-r} = \frac{r^{n+1}}{1-r}\ ,$$

expression que l'on peut aussi retrouver par un décalage d'indice et une factorisation puisque

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} r^k = \sum_{j=0}^{+\infty} r^{j+n+1} = r^{n+1} \sum_{j=0}^{+\infty} r^j = \frac{r^{n+1}}{1-r}\ .$$

Exercice I.3.1. Soit x un réel avec $|x| < 1$, soit α un réel. Convergence et calcul de la somme des séries $\sum_{n\geq 0} x^n \cos(n\alpha)$ et $\sum_{n\geq 0} x^n \sin(n\alpha)$. $\square$

d. Lien entre suites et séries.

On a vu que la convergence d'une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ était définie à partir de la convergence de la suite (S_n) des sommes partielles de cette série, avec $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Mais, connaissant les sommes partielles S_n, on peut retrouver le terme général u_n par $u_0 = S_0$ et, pour $n \geq 1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$. En inversant le point de vue, on peut dire que la convergence d'une suite (S_n) équivaut à la convergence de la série de terme général $u_n = S_n - S_{n-1}$, dite **série télescopique** associée à la suite (S_n).

Énonçons un bilan en changeant de notations (et en décalant les indices):

Proposition: Une suite (x_n) converge si et seulement si la série télescopique associée $\sum (x_{n+1} - x_n)$ converge.

II. Séries à termes positifs.

0. Conventions de calcul dans $\overline{\mathbb{R}_+}$.

On introduira ici l'ensemble $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$, que l'on notera $[0, +\infty]$ ou éventuellement $\overline{\mathbb{R}_+}$. On prolonge alors l'addition usuelle de $\mathbb{R}_+$ en convenant que

$$\forall x \in [0, +\infty] \qquad x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty \ ,$$

et on prolonge la relation d'ordre usuelle de $\mathbb{R}_+$ en convenant que

$$\forall x \in [0, +\infty] \qquad x \leq +\infty \ .$$

Plus précisément, si $x \in [0, +\infty]$, on a

$$x \in \mathbb{R}_+ \iff x \in [0, +\infty[\iff x < +\infty \ .$$

Si $\sum u_n$ est une série **à termes positifs** (i.e. $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in \mathbb{R}_+$) divergente, alors ses sommes partielles tendent vers $+\infty$ (elles forment en effet une suite (S_n) croissante et non majorée), il est donc naturel d'écrire, dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$. Une série à termes positifs a donc toujours une somme dans $[0, +\infty]$. Toujours dans le cadre d'une série **à termes positifs**, on pourra exprimer sa convergence en écrivant que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n < +\infty$.

1. Condition nécessaire et suffisante de convergence.

Proposition: Une série à termes positifs converge si et seulement si ses sommes partielles sont majorées.

Preuve: Soit $\sum_{k \geq 0} u_k$ une série à termes positifs (SATP), soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle d'ordre n. Alors la suite (S_n) est croissante puisque $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$. D'après le théorème de la limite monotone, cette suite (S_n) converge donc si et seulement si elle est majorée.

ATTENTION! Ceci n'est pas vrai pour une série à termes réels quelconques. Par exemple, la série de terme général $u_k = (-1)^k$ est grossièrement divergente, alors que ses sommes partielles sont bornées puisqu'elles valent 0 et 1 alternativement.

2. Séries de référence.

a. Les séries géométriques.

La série géométrique $\sum r^k$ est à termes positifs lorsque la raison r est un réel positif. Dans ce cas, elle est convergente si et seulement si $r < 1$, d'après l'étude faite en **I.3.c.**

b. Les séries de Riemann.

Si α est un réel, on appelle **série de Riemann d'exposant** α la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$.

Proposition. La série de Riemann d'exposant α converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve. Déjà, si $\alpha \leq 0$, il y a divergence grossière, le terme général tendant vers 1 si $\alpha = 0$, et vers $+\infty$ si $\alpha < 0$.

Supposons maintenant $\alpha > 0$, on va utiliser une comparaison série-intégrale (cette méthode sera approfondie un peu plus loin). La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} = \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{k^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha}\ .$$

On en déduit, par décalage des indices, que pour $k \geq 2$, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}\ ,$$

l'inégalité de gauche étant aussi valable pour $k = 1$. Soit $n \geq 2$, en sommant les inégalités ci-dessus pour k allant de 1 à n (dans celle de droite, il faut isoler le terme pour $k = 1$ qui vaut 1), on obtient grâce à la relation de Chasles:

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leq S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}\ .$$

Explicitons maintenant en examinant les différents cas:

- si $\alpha = 1$, cela donne $\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln(n)$. La minoration par $\ln(n+1)$ qui tend vers $+\infty$ montre la divergence de la série dans ce cas.

- si $\alpha \neq 1$, on obtient $\dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - 1\right) \leq S_n \leq 1 + \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right)$. Il y a alors deux sous-cas:

  - si $\alpha > 1$, on a $S_n \leq 1 + \dfrac{1}{\alpha-1}\left(1 - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leq 1 + \dfrac{1}{\alpha-1}$, la suite des sommes partielles est donc majorée. Du paragraphe **II.1.**, *on déduit que la série converge.*

  - si $\alpha < 1$, la minoration $S_n \geq \dfrac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha} - 1\right)$ montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, il y a donc divergence de la série.

Remarque. Pour $\alpha = 1$, la série de Riemann d'exposant 1, à savoir $\sum \dfrac{1}{k}$, est appelée **série harmonique**, et ses sommes partielles sont souvent notées H_n. On a ainsi obtenu l'encadrement $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$, d'où il est facile de déduire un équivalent des sommes partielles: $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Remarque. Le lecteur trouvera certainement dans divers ouvrages les **séries de Bertrand**, de la forme $\sum \dfrac{1}{k^\alpha\,(\ln k)^\beta}$, où α et β sont deux réels. Cela peut faire l'objet d'exercices mais aucun résultat n'est à connaître concernant ces séries.

3. Les théorèmes de comparaison.

Pour connaître la nature d'une série à termes positifs, on cherche à la comparer à une série de référence. Entendons-nous bien: ce que nous comparons (par des inégalités ou des relations de comparaison asymptotique), ce sont **les termes généraux** des deux séries. Il est hors de question de dire qu'une série est majorée par une autre, ou qu'elle est équivalente à une autre, attention à la formulation!

Règle 1. **Soient (u_n) et (v_n) deux suites positives. Si on a $u_n \leq v_n$ pour tout n, alors la convergence de la série $\sum v_n$ implique celle de la série $\sum u_n$.**

Preuve. *Notons $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ les sommes partielles des deux séries. On a immédiatement $U_n \leq V_n$ pour tout n. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la suite (V_n) converge vers un réel positif V, et on a $U_n \leq V_n \leq V$ pour tout n. La suite (U_n) est donc majorée, ce qui entraîne la convergence de la série $\sum u_n$.*

Remarque. *En passant à la limite dans l'inégalité $U_n \leq V_n$, on a $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq V = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.*

Remarque. Pour affirmer que la convergence de la série $\sum v_n$ implique celle de la série $\sum u_n$, il suffit de supposer que l'inégalité $u_n \leq v_n$ est vraie à partir d'un certain rang. *En effet, on ne modifie pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de termes de cette série.*

Règle 2. **Soient (u_n) et (v_n) deux suites positives. Si on a $u_n = O(v_n)$, i.e. si la suite (u_n) est dominée par la suite (v_n), alors la convergence de la série $\sum v_n$ implique celle de la série $\sum u_n$.**

Preuve. *En effet, $u_n = O(v_n)$ siginifie qu'il existe un entier naturel N et un réel positif M tels que, pour tout $n \geq N$, on ait $|u_n| \leq M\,|v_n|$. Si la suite (v_n) ne s'annule pas, la relation $u_n = O(v_n)$ signifie que le rapport $\frac{u_n}{v_n}$ est borné "au voisinage de $+\infty$", c'est-à-dire pour n assez grand, ce qui correspond bien à la précédente formulation. Les séries étant à termes positifs, si $u_n = O(v_n)$, on a donc $0 \leq u_n \leq M v_n$ pour n assez grand et la règle 1 montre alors que la convergence de $\sum v_n$ entraîne la convergence de $\sum u_n$.*

En voici une conséquence immédiate:

Règle 2 bis. **Soient (u_n) et (v_n) deux suites positives. Si on a $u_n = o(v_n)$, i.e. si la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n), alors la convergence de la série $\sum v_n$ implique celle de la série $\sum u_n$.**

Preuve. *Il suffit de remarquer que $u_n = o(v_n)$ entraîne $u_n = O(v_n)$.*

Enfin, la règle la plus importante est sans doute celle-ci (**critère des équivalents**):

Règle 3. **Soient (u_n) et (v_n) deux suites positives. Si on a $u_n \sim v_n$, i.e. si la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n), alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.**

Preuve. *Il suffit de remarquer que $u_n \sim v_n$ entraîne $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.*

Attention! Deux séries à termes "quelconques" (i.e. non nécessairement positifs) dont les termes généraux sont équivalents peuvent être de nature différente, on verra bientôt des exemples.

Exercice II.3.1. Soit (u_n) une suite de réels positifs. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum \ln(1+u_n)$ sont de même nature. $\square$

Un classique: la constante d'Euler.

Soit la suite (H_n) avec $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (somme partielle d'ordre n de la série harmonique). L'objectif est de montrer que la suite (a_n) définie par $a_n = \ln(n) - H_n$ est convergente. Pour cela, il suffit de montrer la convergence de la série télescopique associée $\sum_{n\geq 2}(a_n - a_{n-1})$.

Or, $a_n - a_{n-1} = -\big(\ln(n-1) - \ln(n)\big) - (H_n - H_{n-1}) = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$. Faisons un petit développement limité:

$$a_n - a_{n-1} = -\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \ ,$$

ce que l'on peut écrire aussi $a_n - a_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$. On en déduit que $a_n - a_{n-1}$ est positif à partir d'un certain rang, le critère des équivalents s'applique donc. Comme la série de terme général $\frac{1}{2n^2}$ converge (série de Riemann), on en déduit que la série de terme général $a_n - a_{n-1}$ converge, donc la suite (a_n) converge. Il existe donc un réel γ (appelé **constante d'Euler**) tel que $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\gamma$, ce que l'on peut écrire sous la forme d'un développement asymptotique: $\ln(n) - H_n = -\gamma + o(1)$, ou encore

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1) \ .$$

4. Pratique de la comparaison.

- **Règle de Riemann**, dite aussi **règle $n^\alpha u_n$**.

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. S'il existe un réel α avec $\alpha > 1$, tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors la série de terme général u_n converge.

Preuve. En effet, dans ce cas, on a alors $u_n = o\Big(\frac{1}{n^\alpha}\Big)$ et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge. Par comparaison (règle 2 bis du paragraphe précédent), on conclut que $\sum u_n$ converge.

Exemple 1. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} e^{-\sqrt{n}}$.

Exemple 2. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$.

• **<u>Règle de d'Alembert.</u>**

Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs.
On suppose que le rapport $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ admet une limite $l \in [0, +\infty]$ (cette limite est éventuellement infinie). Alors:
- si $l < 1$, la série $\sum u_n$ converge ;
- si $l > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

<u>Preuve.</u> Supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$. Soit r un réel tel que $l < r < 1$. En prenant $\varepsilon = r - l > 0$ dans la définition de la limite, on voit qu'il existe un rang N à partir duquel $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$, ce que l'on peut mettre sous la forme $\dfrac{a_{n+1}}{r^{n+1}} \leq \dfrac{a_n}{r^n}$. La suite $\left(\dfrac{a_n}{r^n}\right)$ est donc décroissante à partir du rang N et, pour $n \geq N$, on a donc $\dfrac{a_n}{r^n} \leq \dfrac{a_N}{r^N}$, soit encore $a_n \leq \dfrac{a_N}{r^N}\, r^n$. Le majorant obtenu est le terme général d'une série géométrique convergente (puisque la raison est $r < 1$) ; par comparaison de séries à termes positifs (règle 1 du paragraphe précédent), on conclut à la convergence de la série $\sum a_n$.

Dans le cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$, en introduisant un réel r tel que $1 < r < l$, on montre avec des arguments similaires qu'il existe un rang N à partir duquel $a_n \geq \dfrac{a_N}{r^N}\, r^n$, et ce minorant tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ et la série est grossièrement divergente.

<u>Exercice II.4.1.</u> Déterminer la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{2^n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{n^n}$. $\square$

<u>Remarque.</u> Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, on ne peut rien conclure, on dit qu'on est dans le **cas critique** de la règle de d'Alembert.
<u>Attention à énoncer correctement cette règle!</u> Une erreur fréquente est de prétendre que, si $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ pour tout n, alors la série converge, **ce qui est faux!** En effet, cette dernière hypothèse signifie simplement que la suite (a_n) est strictement décroissante, c'est le cas par exemple avec $a_n = \dfrac{1}{n}$, et pourtant la série "harmonique" diverge!
<u>Remarque. Comparaison des deux règles.</u> La règle de d'Alembert est une comparaison à une série géométrique, comme on le voit en lisant la démonstration. La règle de Riemann, comme son nom l'indique, est une comparaison à une série de Riemann, et elle est plus efficace que la règle de d'Alembert. En effet, les séries de Riemann $\sum a_n$ avec $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ rentrent toutes dans le "cas critique" de la règle de d'Alembert puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ dans ce cas. En fait, les séries géométriques ont une convergence rapide (lorsqu'elles convergent) ou bien une divergence rapide (lorsqu'elles divergent), alors que les séries de Riemann ont une convergence (ou divergence) lente, c'est simplement un résultat de croissances com-

parées entre les "suites puissances" $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et les suites géométriques (r^n). On peut donc dire que la règle de Riemann est une comparaison "plus fine" que la règle de d'Alembert.

5. Technique de comparaison série-intégrale.

• **Si** $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ **est une fonction continue et monotone**, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on peut encadrer le réel $f(k)$ comme suit: supposons par exemple f décroissante, alors pour $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [k, k+1]$, on a $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$ et, en intégrant ces inégalités sur le segment $[k, k+1]$, on obtient

$$\textbf{(*)} \qquad f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k)\ ,$$

mais c'est $f(k)$ que l'on veut encadrer. On dispose déjà d'une minoration. Pour majorer $f(k)$, on reprend la première inégalité de **(*)** en décalant les indices, on a ainsi $f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$ mais cette majoration n'est valable pour $k \geq 1$. Cette technique peut être appelée "**méthode des rectangles**", le lecteur est invité à faire un dessin. On a donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t\ ,$$

l'inégalité de gauche étant aussi valable pour $k = 0$.

Si on considère l'expression $S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)$, qui est la somme partielle d'ordre n de la série $\sum f(n)$, on peut alors l'encadrer grâce à la relation de Chasles sur les intégrales. En sommant pour k de 0 à n les inégalités ci-dessus (et en prenant la précaution d'isoler le terme pour $k = 0$ dans la majoration), on a

$$\textbf{(**)} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Remarques. Cette dernière inégalité ne doit surtout pas être apprise par cœur, il faut reproduire la démarche dans chaque exemple d'application, notamment car il y a souvent besoin de l'adapter (sommation commençant à un autre indice que 0, fonction croissante au lieu de décroissante). On reconnaît la méthode utilisée pour étudier la nature des séries de Riemann un peu plus haut.

Remarque. À partir des encadrements obtenus ci-dessus, on peut souvent déterminer la nature de la série de terme général $f(n)$. On peut souvent aussi faire une étude asymptotique des sommes partielles S_n, par exemple en rechercher un équivalent en cas de divergence de la série.

Exercice II.5.1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n\ \ln(n)}$ diverge, et que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n\ \ln(n)^2}$ converge. □

Exercice II.5.2. Donner des équivalents de $S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$, de $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. □

Remarque. Dans le cas d'une série convergente $\sum f(n)$ avec $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue, positive et décroissante, il est possible aussi d'encadrer le reste d'ordre n de la série par des intégrales généralisées. On peut souvent en déduire un équivalent de ce reste d'ordre n.

Exercice II.5.3. Pour tout $n \geq 1$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Prouver l'encadrement $\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}$. En déduire un équivalent simple de R_n. $\square$

III. Séries à termes quelconques (réels ou complexes).

1. Convergence absolue.

Définition. Une série $\sum u_n$ à termes réels ou complexes est dite **absolument convergente** lorsque la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge.

On peut traduire cela par l'inégalité dans $\overline{\mathbb{R}_+}$: $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$.

L'intérêt de cette notion est essentiellement qu'elle entraîne la convergence.

Proposition. Toute série absolument convergente est convergente.

Preuve.

Commençons par le cas d'une série $\sum u_n$ à termes réels. Pour tout n entier naturel, on a $-|u_n| \leq u_n \leq |u_n|$, donc $0 \leq u_n + |u_n| \leq 2\,|u_n|$. Si l'on suppose la série $\sum u_n$ absolument convergente, alors la série de terme général $2\,|u_n|$ converge et, par comparaison de séries à termes positifs (règle 1), on déduit la convergence de la série de terme général $u_n + |u_n|$. Enfin, $u_n = \big(u_n + |u_n|\big) - |u_n|$, donc la série $\sum u_n$ converge car elle est la différence de deux séries convergentes (cf. **I.3.a.**).

Soit maintenant $\sum z_n$ une série à termes complexes supposée absolument convergente, posons $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$ pour tout n. Par hypothèse, la série à termes positifs $\sum |z_n|$ converge. Or, pour tout n, on a $|x_n| \leq |z_n|$ et $|y_n| \leq |z_n|$, donc par comparaison de SATP (règle 1), les séries à termes réels $\sum x_n$ et $\sum y_n$ sont toutes deux absolument convergentes. Elles sont donc toutes deux convergentes d'après la première partie de cette étude (cas réel). Enfin, $z_n = x_n + iy_n$, donc $\sum z_n$ converge car c'est une combinaison linéaire de deux séries convergentes (cf. **I.3.a.**).

ATTENTION! La réciproque de cette proposition est fausse, il existe des séries qui sont convergentes, mais non absolument convergentes, on les qualifie de **semi-convergentes**, nous en verrons des exemples bientôt.

Proposition. Inégalité triangulaire. Si $\sum u_n$ est une série absolument convergente, alors on a

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \,.$$

Preuve. Pour tout N, on a l'inégalité triangulaire usuelle $\left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{N} |u_n|$, il suffit de faire tendre N vers l'infini.

Conséquence. Règle de comparaison. Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite de réels positifs, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Preuve. On a aussi $|u_n| = O(v_n)$, il suffit donc d'appliquer la règle 2 de comparaison des séries à termes positifs pour en déduire que $\sum |u_n|$ converge, ce qui est la conclusion attendue.

Remarque. Dans la proposition précédente, on peut remplacer l'hypothèse $u_n = O(v_n)$ par l'hypothèse $u_n = o(v_n)$ puisque la deuxième implique la première.

Autre vocabulaire. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Lorsque la série $\sum u_n$ est **absolument** convergente, on dit aussi que (u_n) est une **suite sommable**. Le nombre complexe $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est alors aussi appelé **somme** de la suite (u_n).

2. Théorème spécial des séries alternées.

Une série à termes réels $\sum u_n$ est dite **alternée** lorsqu'un terme sur deux est positif, et un terme sur deux est négatif. Si ce sont les termes d'indices pairs qui sont positifs, on peut écrire $u_n = (-1)^n |u_n|$, et si ce sont ceux d'indices impairs alors $u_n = (-1)^{n+1}|u_n|$. On considère ici le premier cas et on pose $v_n = |u_n|$.

Théorème. Soit (v_n) une suite de réels positifs, soit $u_n = (-1)^n v_n$. Si la suite (v_n) est décroissante et tend vers 0, alors la série $\sum u_n$ converge.

Preuve. Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle d'ordre n, et considérons les suites extraites constituées des termes respectivement d'indices pairs et impairs, i.e. posons $T_n = S_{2n}$ et $U_n = S_{2n+1}$. Alors

$$T_{n+1} - T_n = S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+1} + u_{2n+2} = -v_{2n+1} + v_{2n+2} \leq 0$$

puisque la suite (v_n) est décroissante. De la même façon,

$$U_{n+1} - U_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+2} + u_{2n+3} = v_{2n+2} - v_{2n+3} \geq 0\ .$$

Ainsi, la suite (T_n) est décroissante et la suite (U_n) est croissante. Enfin,

$$U_n - T_n = S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} = -v_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$

On a donc montré que les suites $(T_n) = (S_{2n})$ et $(U_n) = (S_{2n+1})$ sont adjacentes. Si on note S la limite commune de ces deux suites, on a alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$. On vient donc de prouver la convergence de la série $\sum u_n = \sum (-1)^n v_n$.

Remarque. Les deux hypothèses sur la suite positive (v_n), à savoir qu'elle est décroissante et tend vers 0, ne sont pas redondantes, i.e. l'une n'implique pas l'autre! En effet, une suite positive décroissante est toujours convergente car elle est décroissante et minorée, mais sa limite n'est pas forcément 0. Et une suite positive qui tend vers 0 n'est pas nécessairement décroissante, pas même à partir d'un certain rang, considérer par exemple $v_n = \dfrac{1}{n+(-1)^n}$ pour $n \geq 2$.

Remarque. Nécessité de l'hypothèse de décroissance. Posons $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ pour $n \geq 2$. La suite (v_n) est positive de limite nulle, mais n'est pas décroissante à partir d'un certain rang (*le lecteur est invité à vérifier par exemple que* $v_{4p^2+1} > v_{4p^2}$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$). La série de terme général $u_n = (-1)^n v_n$ est divergente: en effet, on développe

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\right),$$

donc $u_n = x_n - y_n$ avec $x_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$. Donc $\sum x_n$ converge d'après le théorème ci-dessus, et $\sum y_n$ diverge (le critère des équivalents s'applique car $-\dfrac{1}{n}$ est de signe constant), et finalement $\sum u_n$ diverge. **L'hypothèse "(v_n) décroissante" ne peut donc être omise dans l'énoncé de ce théorème.**

Allons plus loin. Avec les mêmes hypothèses, on peut énoncer des propriétés concernant le reste d'ordre n de la série, soit $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_k$. Dans l'écriture de ce reste, le premier terme u_{n+1} sera appelé "le premier terme négligé" (sous-entendu: lorsqu'on arrête la sommation au rang n). En effet, la suite (S_{2n}) converge en décroissant vers S, alors que (S_{2n+1}) converge en croissant vers la même limite S. On a donc pour tout n, l'encadrement $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$. On obtient alors $S_{2n+1} - S_{2n} \leq S - S_{2n} \leq 0$ en retranchant S_{2n} à chaque membre, soit encore **(1):** $u_{2n+1} = -v_{2n+1} \leq R_{2n} \leq 0$. Mais on a aussi $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2}$ et, en retranchant S_{2n+1} à chaque membre, on obtient **(2):** $0 \leq R_{2n+1} \leq u_{2n+2} = v_{2n+2}$.

En synthétisant les encadrements **(1)** et **(2)** obtenus ci-dessus, on voit que, pour tout n entier naturel, le reste R_n est du même signe que le premier terme négligé et qu'il est, en valeur absolue, majoré par le premier terme négligé: $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Je laisse le lecteur se persuader du fait que, formulées ainsi, les propriétés énoncées pour le reste R_n sont encore vraies si l'on remplace chaque terme de la série par son opposé. Finalement, on a le

Bilan: Soit $\sum u_n$ une série alternée dont la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant. Alors une telle série converge et, pour tout n, son reste d'ordre n, noté R_n, est du même signe que le premier terme négligé u_{n+1}, et est majoré en valeur absolue par ce premier terme négligé, i.e. $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Ce "**théorème spécial des séries alternées**" va nous permettre de construire des séries semi-convergentes, i.e. convergentes, mais non absolument convergentes.

Exemple des séries de Riemann alternées.

Ce sont les séries de la forme $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ avec α réel. Discutons selon les valeurs de α:

- si $\alpha \leq 0$, la série est grossièrement divergente (le terme général ne tend pas vers 0) ;
- si $0 < \alpha \leq 1$, il n'y a pas convergence absolue (la série de Riemann "non alternée" étant convergente si et seulement si $\alpha > 1$), mais il y a convergence grâce au théorème spécial puisque la valeur absolue du terme général, $\dfrac{1}{n^\alpha}$, tend vers 0 en décroissant. Il y a donc semi-convergence.
- si $\alpha > 1$, il y a convergence absolue (donc convergence).

Cet exemple va nous permettre de voir que le critère des équivalents ne s'applique pas aux séries alternées. En effet, posons

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\ , \quad v_n = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad w_n = u_n + v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\ .$$

La série $\sum u_n$ converge (c'est une série de Riemann alternée avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$), la série $\sum v_n$ diverge (c'est la série harmonique), donc $\sum w_n$ diverge (cv+div=div). Pourtant $v_n = o(u_n)$ puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$, donc $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. Les séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$, dont les termes généraux sont équivalents, ne sont donc pas de même nature!

Moralité. Le critère des équivalents doit être appliqué uniquement aux séries à termes positifs, ou bien avec un peu plus de généralité, aux séries dont le terme général est de signe constant à partir d'un certain rang.

IV. Compléments

1. Formule de Stirling.

Elle donne un équivalent, à connaître, de $n!$ lorsque n tend vers $+\infty$ (*démonstration non exigible*):

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n .}$$

Attention! Cette formule ne doit être utilisée qu'en dernier recours, si aucune méthode plus élémentaire ne semble aboutir. Par exemple, s'il s'agit de déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$, il serait mal vu d'utiliser la formule de Stirling alors que la règle de d'Alembert (plus élémentaire) permet de conclure simplement.

Exercice IV.1.1. Nature de la série $\sum u_n$ avec $u_n = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}$. □

2. Produit de Cauchy de deux séries.

Définition. Le **produit de Cauchy** de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ de nombres complexes est la série $\sum w_n$, avec

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \ .$$

On a alors le résultat suivant (*démonstration non exigible*):

Théorème. **Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy $\sum w_n$ est aussi une série absolument convergente, et on a**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\Big) \times \Big(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\Big) \ .$$

Exemple. Pour x complexe tel que $|x| < 1$, la série géométrique $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge absolument et a pour somme $\dfrac{1}{1-x}$. Si on pose $u_n = v_n = x^n$, alors $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = (n+1)x^n$. La série $\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n$ est donc le "carré de Cauchy" de la première série introduite. On déduit du théorème ci-dessus que, si $|x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\Big)^2 = \frac{1}{(1-x)^2} \ .$$

3. La série exponentielle.

Proposition 1. **Pour tout z complexe, la série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{z^n}{n!}$ est absolument convergente.**

Preuve. Si $z = 0$ c'est évident. Sinon, utilisons la règle de d'Alembert en posant $a_n = \dfrac{|z|^n}{n!}$, on a alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1} \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0 \ ,$$

et comme $0 < 1$, cela prouve la convergence de la série à termes positifs $\sum a_n$, ce que l'on voulait démontrer.

Proposition 2. **Pour tout z complexe, on a** $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!} = e^z}$.

Preuve. Considérons la fonction $\begin{cases} f: \ \mathbb{R} \ \to \ \mathbb{C} \\ \quad t \ \ \mapsto \ e^{zt} \end{cases}$. *Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on peut donc, à tout ordre n, lui appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et 1:*

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,(1-0)^k \right| \leq \frac{(1-0)^{n+1}}{(n+1)!}\, M_{n+1} \ ,$$

avec $M_{n+1} = \max_{t\in[0,1]} \left|f^{(n+1)}(t)\right|$. Comme $f^{(k)}(t) = z^k\, e^{zt}$ pour tout k, cela donne

$$\left| e^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \, M_{n+1} \; .$$

Enfin, $M_{n+1} = \max_{t\in[0,1]} \left| z^{n+1} \, e^{zt} \right| = |z|^{n+1} \, C$ *avec* $C = \max_{t\in[0,1]} \left| e^{zt} \right|$ *(ce nombre ne dépend pas de l'entier* n*). Au final,* z *étant fixé, on a obtenu une majoration de la forme*

$$\left| e^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leq C \, \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \; .$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ *par croissances comparées (ou bien, parce que c'est le terme général d'une série convergente d'après la Proposition 1.), donc* $\lim_{n\to+\infty} \left(e^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right) = 0$*, ce qui est le résultat annoncé.*

4. <u>Quelques compléments sur les suites sommables.</u>

Je commencerai par énoncer le résultat suivant (*admis*):

<u>Théorème.</u> Toute série de nombres complexes $\sum u_n$ absolument convergente est "commutativement convergente", i.e. si $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une bijection, alors la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est aussi absolument convergente et a la même somme:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \; .$$

La somme de la série (et d'abord le fait que la série converge) ne dépend donc pas de l'ordre des termes, elle est invariante par **permutation** des indices.

Ceci est faux pour une série semi-convergente: en permutant les termes de la série, on peut la rendre divergente, ou bien la faire converger vers une autre valeur, *cf.* exercice 24 de la feuille de TD sur les séries.

En utilisant un autre vocabulaire introduit dans le paragraphe **III.1.**, on peut dire que, si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite sommable, on posera $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, cette notation est cohérente puisqu'elle ne dépend pas de l'ordre de sommation des termes d'après le théorème ci-dessus. Plus généralement, si A est une partie de $\mathbb{N}$, on pourra donner un sens à l'expression $\sum_{n\in A} u_n$: pour cela, on introduit la **fonction indicatrice** de la partie A, à savoir l'application $\mathbb{1}_A : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{1}_A(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \in A \\ 0 \text{ si } n \notin A \end{cases} .$$

On pose alors $\sum_{n\in A} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_A(n) \, u_n$. Cela a bien un sens puisque $\left| \mathbb{1}_A(n) \, u_n \right| \leq |u_n|$ pour tout n, ce qui entraîne la convergence absolue de la série de terme général $\mathbb{1}_A(n) \, u_n$.

Notons que, si $\sum u_n$ est une série semi-convergente, il n'est pas toujours possible de sommer sur une partie de l'ensemble des indices. Par exemple, considérons la série harmonique alternée $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Si on ne considère que les termes d'indices impairs, ils sont tous positifs, et la "série extraite" $\displaystyle\sum_{p\geq 0} \frac{1}{2p+1}$ est divergente.

Enfin, si $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série absolument convergente, et si $(A_1, \cdots, A_k)$ est une **partition** de l'ensemble $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une famille de parties de $\mathbb{N}$, toutes non vides, deux à deux disjointes, et recouvrant $\mathbb{N}$ (i.e. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \mathbb{N}$, ce que l'on écrira aussi $\displaystyle\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i = \mathbb{N}$ pour marquer que c'est une union disjointe), on a alors

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{n\in A_i} u_n \Big) .$$

<u>*Preuve.*</u> *Il suffit de constater que* $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{A_i} = 1$ *(fonction constante de valeur 1) puisque chaque entier naturel* n *est dans un et un seul des ensembles* A_i. *On a donc, par linéarité de la somme,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{A_i}(n)\, u_n \Big) = \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_i}(n)\, u_n \Big) = \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{n\in A_i} u_n \Big) .$$

<u>**Exercice IV.5.1.**</u> Connaissant $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer les sommes

$$A = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \quad \text{et} \quad B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} . \qquad \square$$