DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 1

PSI2 2023-2024 **Durée: 4 heures** **16/09/2023**

EXERCICE

Dans tout cet exercice, la lettre n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout p entier naturel non nul, on pose $H_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}$.

Pour tout k entier naturel, on pose $a_k = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-1}$ et, pour k entier naturel non nul, on pose $u_k = a_{k-1} - a_k$.

1.a. Pour tout k entier naturel non nul, prouver l'encadrement

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k} .$$

b. En déduire que $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$.

2.a. Montrer que la série de terme général u_k converge, et calculer sa somme $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

b. Montrer que la série de terme général a_k converge, on notera S_n sa somme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$, que l'on ne cherchera pas à calculer.

c. Montrer que la série de terme général $k\, u_k$ converge, et prouver l'égalité $\sum_{k=1}^{+\infty} k u_k = S_n$.

L'objectif de la question **3.** *est de rechercher un équivalent de S_n lorsque $n \to +\infty$.*

3. Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad g_n(t) = 1 - (1 - 2^{-t})^{n-1} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^t}\right)^{n-1}$.

a. Préciser le sens de variation de la fonction g_n sur $\mathbb{R}_+$.

b. Soit m un entier naturel tel que $m \geq 2$. Prouver les inégalités

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \leq \int_0^m g_n(t)\, \mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{m-1} a_k .$$

c. Soit α un réel strictement positif. Montrer l'égalité

$$\int_0^\alpha g_n(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\ln(2)} \int_0^{1-2^{-\alpha}} \frac{1-u^{n-1}}{1-u}\, \mathrm{d}u .$$

d. En déduire l'encadrement

$$S_n - 1 \leq \frac{H_{n-1}}{\ln(2)} \leq S_n .$$

e. Donner un équivalent simple de S_n lorsque n tend vers l'infini.

PROBLÈME

Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n}\, \mathrm{d}t$ et $W'_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n+1}\, \mathrm{d}t$ (**intégrales de Wallis**).

PARTIE A.

A.1. Montrer que $W_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et, à l'aide d'une intégration par parties, prouver la relation $W_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2}\, W_n$.

A.2. En déduire la relation $W_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$ pour tout entier naturel n.

A.3. Écrire une relation liant W'_n et W'_{n+1}. En déduire la relation $W'_n = \dfrac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n+1)!}$.

A.4. Montrer que $W_{n+1} \leq W'_n \leq W_n$ pour tout n entier naturel. En déduire que $W'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.

A.5. De l'équivalence $W'_n \sim W_n$, déduire la **formule de Wallis** : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{4n}\,(n!)^4}{n\,\big((2n)!\big)^2} = \pi$.

A.6. On pose $a_n = \dfrac{n!\, e^n}{n^n\,\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis $b_n = \ln(a_n)$. En exploitant un développement limité de $b_n - b_{n-1}$, montrer que la série télescopique $\displaystyle\sum_{n\geq 2}(b_n - b_{n-1})$ est convergente. En déduire que la suite (a_n) admet une limite A strictement positive.

A.7. Démontrer la **formule de Stirling** : $n! \sim \sqrt{2\pi\, n}\,\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

A.8. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs, toutes deux convergentes. On suppose que $u_n \sim v_n$. Démontrer que $R_n \sim R'_n$, où $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R'_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ sont les restes d'ordre n de ces deux séries.

A.9. En utilisant la comparaison à une intégrale, démontrer l'équivalence $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

A.10. En déduire un développement asymptotique de $n!$ de la forme

$$n! = \sqrt{2\,\pi\, n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{C}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right),$$

où C est une constante à déterminer.

PARTIE B.

Dans cette partie, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\,(\cos t)^{2n}\,\mathrm{d}t$ pour tout entier naturel n.

B.1. Par deux intégrations par parties, montrer la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad W_n = -2n^2\, J_n + n(2n-1)\, J_{n-1}\,.$$

B.2. En déduire que $\dfrac{1}{n^2} = 2\Big(\dfrac{J_{n-1}}{W_{n-1}} - \dfrac{J_n}{W_n}\Big)$ pour tout n entier naturel non nul.

B.3.a. Montrer, pour tout $t \in \Big[0, \dfrac{\pi}{2}\Big]$, l'inégalité $t \leq \dfrac{\pi}{2} \sin t$. *On pourra exploiter la concavité de la fonction sinus sur l'intervalle considéré.*

b. En déduire que $0 \leq J_n \leq \dfrac{\pi^2}{4}(W_n - W_{n+1})$ pour tout entier naturel n, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{J_n}{W_n} = 0$.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

B.4. En utilisant **B.2.**, transformer l'expression de S_n.

B.5. En déduire la valeur de la somme $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} S_n$.

B.6. En déduire la valeur de la somme $T = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$.

PARTIE C.

On se propose dans cette partie d'**accélérer la convergence** de la série étudiée à la fin de la partie **B.**, c'est-à-dire de construire une suite (S'_n) ayant la même limite S que la suite (S_n), mais convergeant vers S plus rapidement.

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles et ayant une limite nulle en $+\infty$.

On note f_0 la fonction de E définie par $f_0(x) = \dfrac{1}{x}$ et, pour tout entier naturel non nul k, on définit $f_k \in E$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f_k(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+k)} = \frac{1}{\displaystyle\prod_{i=0}^{k}(x+i)} .$$

On note enfin Δ l'application qui, à toute fonction f de E, associe la fonction Δf définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad (\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x) .$$

C.1. Montrer que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

C.2. Soit f une fonction appartenant à E. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{p\geq 1}(\Delta f)(p)$ converge, et calculer sa somme $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}(\Delta f)(p)$, ainsi que son reste d'ordre n : $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty}(\Delta f)(p)$.

C.3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer la fonction Δf_{k-1} à l'aide de k et de f_k.

C.4. Pour k entier naturel non nul, établir la convergence de la série $\sum_{p\geq 1} f_k(p)$, et déterminer son reste d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$), soit le nombre $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p)$.

C.5. Pour p et q entiers naturels non nuls, montrer la relation

$$\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} (k-1)!\, f_k(p) = \frac{q!}{p}\, f_q(p)\ .$$

C.6. En déduire, pour n et q entiers naturels non nuls, l'inégalité

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} \frac{(k-1)!}{k(n+1)\cdots(n+k)} \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2\,(n+2)\cdots(n+q)}\ .$$

C.7. En choisissant $q = 2$ dans la question précédente, déterminer une suite (S'_n) convergeant vers $S = \dfrac{\pi^2}{6}$ et telle que $S - S'_n = O\Big(\dfrac{1}{n^3}\Big)$. *On exprimera S'_n en fonction de S_n et de n.*