DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 1

PSI2 2023-2024 — **à rendre le 28/09/2023**

PROBLÈME 1

Définitions :

Soit (a_n) une suite de réels **non nuls**. On dit que " le **produit infini** $\prod_{n\geq 0} a_n$ est convergent" si la suite (P_n) définie par $P_n = \prod_{k=0}^{n} a_k$ admet une limite réelle **non nulle**. Dans ce cas, on note alors $\prod_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} P_n$. Pour tout entier naturel n, le réel P_n est appelé **produit partiel d'ordre** n et, en cas de convergence, le réel $P = \lim_{n\to+\infty} P_n$ est aussi appelé **produit infini** des a_n.

Remarque. L'indice de départ de la multiplication ne sera pas toujours 0, le candidat adaptera de lui-même.

PARTIE A. Étude de produits infinis

A.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$. Calculer les produits partiels P_n correspondants $(n \geq 1)$. Le produit infini $\prod_{n\geq 1} a_n$ est-il convergent ?

A.2. Montrer qu'une condition nécessaire pour que le produit infini $\prod_{n\geq 0} a_n$ soit convergent est que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$. La condition est-elle suffisante ?

A.3. On considère les produits infinis

$$P = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) \quad ; \quad Q = \prod_{k=2}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

Exprimer les produits partiels P_{2n}, P_{2n+1} et Q_n. En déduire la convergence des deux produits infinis considérés et leur valeur.

A.4. Dans cette question, on pose $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer que l'on peut écrire $\ln(a_n) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - r_n$ et préciser un équivalent de r_n.

b. En déduire la nature de la série de terme général $\ln(a_n)$.

c. Quelle est la nature du produit infini $\prod_{n\geq 1} a_n$? *On précisera la limite de* $P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

A.5. Soit (u_n) une suite de réels **positifs**.

a. Montrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n \ln(1+u_n)$ sont de même nature.

b. Montrer que le produit infini $\prod (1+u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

A.6.a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2n}$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge, mais que le produit infini $\prod_{n\geq 1}(1+u_n)$ converge.

b. Proposer une suite $(v_n)_{n\geq 1}$ telle que $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge, mais $\prod_{n\geq 1}(1+v_n)$ diverge.

PARTIE B. Une équation fonctionnelle

B.1. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $]-\pi,\pi[$, soit le produit infini $\prod_{n\geq 1} \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

a. En utilisant la relation de trigonométrie $\sin(2a) = 2\,\sin(a)\,\cos(a)$, exprimer le produit partiel $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$ pour n entier naturel non nul.

b. En déduire la convergence du produit infini considéré et préciser sa valeur, notée $P(x) = \lim_{n\to+\infty} P_n(x)$.

B.2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est continue en 0 et qu'elle vérifie la relation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(2x) = f(x)\,\cos(x)\,. \qquad \textbf{(E)}$$

a. Soit $x \in]-\pi,\pi[$. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) P_n(x)$. En déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x et du nombre $a = f(0)$.

b. Montrer par récurrence sur l'entier naturel p que l'expression de $f(x)$ obtenue à la question **B.2.a.** ci-dessus reste valable pour tout x appartenant à l'intervalle $]-2^p\pi\,,\,2^p\pi[$.

c. Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues en 0 et solutions de **(E)** ?

PROBLÈME 2

Les trois parties de ce problème abordent des sujets voisins, mais peuvent se traiter indépendamment.

PARTIE A. Irrationalité du nombre e.

Pour tout n entier naturel non nul, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}\,.$$

1.a. Sens de variation et limite de (u_n).

b. Sens de variation et limite de (v_n).

c. En déduire, pour tout n entier naturel non nul, les inégalités $u_{n+1} \leq e \leq v_n$.

2. Dans cette question, on suppose que le nombre e est rationnel: $e = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers naturels non nuls.

a. Prouver les inégalités strictes

$$u_q < e < u_q + \frac{1}{q!}\,.$$

b. En déduire une contradiction et conclure.

PARTIE B. Irrationalité du nombre π.

Dans toute cette partie, on supposera que le nombre π est le quotient de deux entiers naturels non nuls: $\pi = \frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout n entier naturel non nul, soit le polynôme $P_n = \dfrac{X^n\,(a-bX)^n}{n!}$.

On convient que $P_0 = 1$.

Pour tout n entier naturel, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} P_n(x)\,\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

3.a. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad P_n(\pi - x) = P_n(x)\ .$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer P_n' à l'aide de P_{n-1}.

c. Exprimer $M_n = \max\limits_{x \in [0,\pi]} \left|P_n(x)\right|$ en fonction de a, b et n.

d. Montrer que, pour tout n entier naturel, on a $I_n > 0$.

e. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

4.a. Soit $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} c_k X^k$ un polynôme, soit p un entier naturel. Exprimer le nombre $Q^{(p)}(0)$ à l'aide des coefficients c_k du polynôme Q. *On pourra convenir que $c_k = 0$ pour $k > d$.*

b. Soient n et k des entiers naturels. Montrer que $P_n^{(k)}(0)$ est un entier relatif. *On pourra séparer les trois cas:*

$$0 \leq k \leq n-1 \quad ; \quad n \leq k \leq 2n \quad ; \quad k \geq 2n+1\ .$$

c. En déduire que $P_n^{(k)}(\pi)$ est un entier relatif.

d. Soit $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} c_k X^k$ un polynôme de degré d avec $d \in \mathbb{N}$. Que vaut le polynôme $Q^{(d)}$?

5.a. En utilisant des intégrations par parties successives et la question **4.**, montrer que, pour tout n entier naturel, I_n est un entier relatif.

b. En déduire une contradiction et conclure.

PARTIE C. Étude des E-développements.

6.a. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'entiers naturels avec $a_0 \geq 2$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_n}$ est convergente, et que sa somme est inférieure ou égale à $\dfrac{1}{a_0 - 1}$.

Si x désigne la somme de cette série, on dira que le réel x admet un E-développement, et on notera

$$x = [a_0, \cdots, a_n, \cdots]\ .$$

b. Montrer que $a_0 = 1 + \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ représente la partie entière du réel x.

7. Existence. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $]0,1]$. On définit deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $x_0 = x$, puis

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = 1 + \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor \quad \text{et} \quad x_{n+1} = a_n x_n - 1 \ .$$

a. Montrer que les suites (x_n) et (a_n) sont bien définies, et que $x_n > 0$ pour tout n.

b. Montrer que la suite (x_n) est décroissante, que la suite (a_n) est croissante, et que $a_0 \geq 2$.

c. Prouver que, pour tout n entier naturel, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0 \cdots a_k} = x - \frac{x_{n+1}}{a_0 \cdots a_n} \ .$$

En déduire que le réel x admet un E-développement.

8. Unicité. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites croissantes d'entiers naturels, avec $a_0 \geq 2$ et $b_0 \geq 2$, telles que $[a_0, \cdots, a_n, \cdots] = [b_0, \cdots, b_n, \cdots]$. On suppose ces deux suites distinctes, et on pose $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq b_n\}$.

a. Montrer que $[a_{n_0}, \cdots, a_n, \cdots] = [b_{n_0}, \cdots, b_n, \cdots]$.

b. En utilisant **6.b.**, obtenir une contradiction et conclure.

9.a. Soit$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'entiers avec $a_0 \geq 2$. On suppose que cette suite (a_n) est stationnaire. Montrer que le nombre $x = [a_0, \cdots, a_n, \cdots]$ est rationnel.

b. Réciproquement, soit $x \in]0,1]$ supposé rationnel, on peut donc écrire $x = \dfrac{u}{v}$ avec u et v entiers naturels tels que $0 < u \leq v$. En reprenant les notations (a_n) et (x_n) de la question **7.**, montrer qu'il existe une suite décroissante (u_n) d'entiers naturels telle que $x_n = \dfrac{u_n}{v}$ pour tout n. En déduire que la suite (a_n) est stationnaire.

10. Calculer $x = [a_0, \cdots, a_n, \cdots]$ dans les différents cas suivants:

a. (a_n) est une suite constante de valeur c, avec $c \in \mathbb{N}$, $c \geq 2$;

b. $a_n = n + 2$ pour tout n ;

c. $a_n = (2n+1)(2n+2)$ pour tout n. *On rappelle que* $\operatorname{ch}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ *pour tout x réel.*

11. À l'aide des questions **9.** et **10.**, retrouver l'irrationalité du nombre e.

12. Déterminer le E-développement du réel $\operatorname{ch}(\sqrt{2}) - 2$. En déduire que les nombres $\operatorname{ch}(\sqrt{2})$ et $e^{\sqrt{2}}$ sont irrationnels.