Séries à termes positifs.

1. Nature des séries de terme général u_n, avec

a. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$; **b**. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$; **c**. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{\big(e^n - 1\big)^\alpha}$; **d**. $u_n = \Big(\dfrac{n+1}{n+2}\Big)^{n\,\ln^2(n)}$.

- -

a. On applique la règle de d'Alembert (série à termes strictement positifs) :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-n} = e^{-n\,\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}\ .$$

Comme $e^{-1} < 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

b. Ici, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ puisque $\sqrt{n} - \sqrt{n+1} = -\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure. Essayons la comparaison à une série de Riemann (*règle* $n^\alpha u_n$) : choisissons $\alpha = 2$, alors $n^2 u_n = n^2\, e^{-\sqrt{n}} = e^{2\ln n - \sqrt{n}}$. Comme $\ln n = o(\sqrt{n})$ (*croissances comparées*), l'exposant $2\ln n - \sqrt{n}$ est équivalent à $-\sqrt{n}$ et tend donc vers $-\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$ ce qui signifie que $u_n = o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ et assure la convergence de la série.

c. On a $u_n > 0$ et, de $e^n - 1 \sim e^n$, on tire $u_n \sim v_n$ avec $v_n = e^{-\alpha n}\,\ln(n)$, les deux séries sont donc de même nature. Or, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = e^{-\alpha}\,\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\alpha}$. De la règle de d'Alembert, on déduit donc la convergence de $\sum v_n$ pour $\alpha > 0$ et sa divergence pour $\alpha < 0$. Enfin, pour $\alpha = 0$, on a $u_n = v_n = \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc divergence grossière. En conclusion, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

d. On a

$$u_n = \exp\left(n\ln^2(n)\ln\Big(1-\frac{1}{n+2}\Big)\right) = \exp\left(n\ln^2(n)\Big(-\frac{1}{n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\right) = e^{-\ln^2(n)}\cdot\exp\left(O\Big(\frac{\ln^2(n)}{n}\Big)\right)\ .$$

Comme $\dfrac{\ln^2(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, le facteur $\exp\left(O\Big(\dfrac{\ln^2(n)}{n}\Big)\right)$ tend vers 1, donc $u_n \sim v_n$ avec $v_n = e^{-\ln^2(n)}$. Ensuite, $n^2 v_n = e^{2\ln(n)-\ln^2(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque l'exposant de l'exponentielle tend vers $-\infty$, donc $v_n = o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ et $\sum v_n$ converge alors, et $\sum u_n$ aussi puisque les deux séries à termes positifs sont de même nature (termes généraux équivalents).

---

2. Calculer les sommes

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{et} \quad T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\ .$$

- -

Les deux séries sont convergentes, puisque leurs termes généraux sont respectivement équivalents à $\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n^3}$.

• On décompose en éléments simples: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, on observe alors un télescopage en calculant une somme partielle:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}\ ,$$

puis $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = 1$.

• On décompose en éléments simples: $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$. Ici aussi, on observe un télescopage lors du calcul d'une somme partielle:

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}\ , \end{aligned}$$

les termes pour k de 3 à n s'annihilant. Enfin, $T = \lim_{n\to+\infty} T_n = \frac{1}{4}$.

---

3. On considère les intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n}\,\mathrm{d}t$.

a. Prouver la relation $W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} W_n$.

b. On pose $u_n = \sqrt{n}\, W_n$. Montrer que la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge.

c. En déduire l'existence d'un réel strictement positif K tel que $W_n \sim \frac{K}{\sqrt{n}}$.

- -

a. On écrit

$$W_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t\,(1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t = W_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{2n} t\ \sin t)\ \sin t\,\mathrm{d}t\ .$$

Une intégration par parties donne alors

$$W_{n+1} = W_n + \left[\frac{\sin t\ \cos^{2n+1} t}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{W_{n+1}}{2n+1}\ ,$$

ce qui conduit à la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (2n+2)\,W_{n+1} = (2n+1)\,W_n\ ,$$

ce qu'il fallait prouver.

b. On a

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= \ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\,\frac{W_{n+1}}{W_n}\right) = \ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\,\frac{2n+1}{2n+2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)-\left(\frac{1}{2n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)\\
&= O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\,,
\end{aligned}$$

la série est donc convergente.

c. La série étudiée en **b.** est télescopique puisque $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)$. Comme cette série converge, on en déduit la convergence de la suite associée, de terme général $\ln(u_n)$. Il existe donc un réel l tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n)=l$. Par continuité de la fonction exponentielle, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=K$ avec $K=e^l>0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\,W_n=K$, soit $W_n\sim\dfrac{K}{\sqrt{n}}$.

---

4. En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer la partie entière du nombre

$$N=\sum_{k=1}^{10^4}\frac{1}{\sqrt{k}}\,.$$

- -

La fonction $t\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est continue et strictement décroissante, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on peut alors écrire $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}<\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}<\frac{1}{\sqrt{k}}$, ou encore $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}<\frac{1}{\sqrt{k}}<\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$, l'inégalité de droite étant prise en compte seulement pour $k\geq 2$ (même si elle a aussi un sens pour $k=1$). En sommant ces inégalités, on obtient

$$\int_1^{10001}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}<N=\sum_{k=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{k}}<1+\int_1^{10000}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}\,,$$

soit $2\big(\sqrt{10001}-1\big)<N<1+2(100-1)=199$.

Comme, d'autre part, $2\big(\sqrt{10001}-1\big)>2(100-1)=198$, on a donc $198<N<199$ et $\lfloor N\rfloor=198$.

---

5. Donner un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $S_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\,\ln k}$

- -

La fonction $f:t\mapsto\dfrac{1}{t\,\ln(t)}$ est continue, positive et décroissante sur $[2,+\infty[$, on peut donc appliquer les méthodes de comparaison série-intégrale. Pour $k\geq 2$, on a l'encadrement

$f(k+1) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k)$, d'où on tire $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$, l'inégalité de droite étant alors valable seulement pour $k \geq 3$. En sommant pour k allant de 2 à n, on obtient $\displaystyle\int_2^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq S_n = \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq f(2) + \int_2^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$, soit

$$\ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) \leq S_n \leq \frac{1}{2\,\ln(2)} + \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big)\ .$$

Le minorant et le majorant étant tous deux équivalents à $\ln\big(\ln(n)\big)$ (*le lecteur le démontrera en détail!*), on déduit par le théorème d'encadrement que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\big(\ln(n)\big)$.

---

6. Séries de Bertrand

On appelle ainsi les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$, avec $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha\,(\ln n)^\beta}$, où α et β sont deux réels. On se propose d'étudier leur convergence.

a. On suppose $\alpha > 1$. En étudiant $n^\gamma u_n$, pour un choix convenable de γ, montrer que la série converge.

b. On suppose $\alpha < 1$. En considérant nu_n, montrer que la série diverge.

c. On suppose $\alpha = 1$. Par comparaison à une intégrale, discuter de la nature de la série $\sum u_n$.

- -

a. L'expression $n^\gamma u_n = n^{\gamma-\alpha}\,(\ln n)^{-\beta}$ tend vers zéro dès que l'exposant $\gamma - \alpha$ est strictement négatif (et ceci quel que soit le réel β) d'après les théorèmes de croissances comparées. Choisissons donc γ tel que $1 < \gamma < \alpha$ (ce qui est possible) ; on a alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^\gamma u_n = 0$ d'après ce qui précède, donc $u_n = o\Big(\dfrac{1}{n^\gamma}\Big)$, et la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\gamma}$ converge d'après le cours, donc par comparaison $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ converge.

b. Si $\alpha < 1$, alors $n\,u_n = n^{1-\alpha}\,(\ln n)^{-\beta}$ tend vers $+\infty$ (et ceci quel que soit le réel β) d'après les théorèmes de croissances comparées. Donc u_n est prépondérant devant $\dfrac{1}{n}$, autrement dit $\dfrac{1}{n} = o(u_n)$; comme on sait que la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, par comparaison, on déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge.

c. Pour $x \in\ [2, +\infty[$, posons $f(x) = \dfrac{1}{x\,(\ln x)^\beta}$. La fonction f est continue et positive sur $[2, +\infty[$, et elle est dérivable avec $f'(x) = -\dfrac{\beta + \ln x}{x^2\,(\ln x)^{\beta+1}}$; on a donc $f'(x) \leq 0$ pour x suffisamment grand (précisément pour $x \geq e^{-\beta}$), donc f est décroissante sur $\big[e^{-\beta}, +\infty\big[$. On peut donc affirmer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est de même nature que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Or, un calcul de primitive sur $[2,+\infty[$ donne

- si $\beta = 1$, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t\,\ln t} = \ln(\ln t) + C$;
- si $\beta \neq 1$, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t\,(\ln t)^{\beta}} = \frac{1}{1-\beta}\,\frac{1}{(\ln t)^{\beta-1}} + C$.

L'intégrale impropre considérée converge si et seulement si la primitive (c'est à une constante près, mais cela ne change rien) admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, et ceci est vérifié si et seulement si $\beta > 1$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\,(\ln n)^{\beta}}$ converge donc si et seulement si $\beta > 1$.

Conclusion. La série de Bertrand $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{\alpha}\,(\ln n)^{\beta}}$ converge donc si et seulement si

$$(\alpha > 1) \qquad \text{ou} \qquad (\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \beta > 1)\ .$$

---

7. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, convergente. Pour tout n, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

a. Démontrer la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} R_k - \sum_{k=1}^{n} k u_k = (n+1)\,R_n$.

b. En cas de convergence de la série $\sum n u_n$, montrer que $(n+1)\,R_n \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} k u_k$.

c. En déduire que les séries $\sum n\,u_n$ et $\sum R_n$ sont de même nature et que, en cas de convergence, elles ont la même somme.

- -

a. Notons que $u_k = R_{k-1} - R_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k u_k &= \sum_{k=1}^{n} k(R_{k-1} - R_k) = \sum_{k=1}^{n} k R_{k-1} - \sum_{k=1}^{n} k R_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) R_k - \sum_{k=1}^{n} k R_k \ = \ R_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \big[(k+1) - k\big]\,R_k - n R_n \\
&= \sum_{k=0}^{n} R_k - (n+1)\,R_n\ ,
\end{aligned}$$

ce qui donne bien l'égalité demandée.

b. Fixons un entier n. Soit p un entier supérieur à n, on a alors

$$(n+1)\sum_{k=n+1}^{p} u_k = \sum_{k=n+1}^{p} (n+1) u_k \leq \sum_{k=n+1}^{p} k u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k u_k\ .$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient $(n+1)R_n = (n+1)\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k u_k$.

c. • Si la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n u_n$ converge, alors ses restes $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} k u_k$ existent et tendent vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$; de la question **b.**, on déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n+1)R_n = 0$ et, de la question **a.**, on déduit la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} R_n$ et l'égalité des sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} R_k = \sum_{k=1}^{+\infty} k u_k$.

• Si la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} R_k$ converge, soit $X = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} R_k$ sa somme ; la question **a.** montre que, pour tout n entier, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k = \sum_{k=0}^{n} R_k - (n+1)R_n \leq \sum_{k=0}^{n} R_k \leq X$: la série à termes positifs $\sum k u_k$, dont les sommes partielles sont majorées, est donc convergente ; en appliquant le point précédent, on retrouve bien sûr l'égalité des sommes.

---

8. Étudier la suite (u_n) définie par $0 < u_0 \leq \dfrac{\pi}{2}$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Déterminer la nature des séries de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, puis u_n^2 et enfin u_n.

- -

• Soit $f : x \mapsto \sin x$. L'intervalle $I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ est stable par f puisque son image est $]0,1]$ et on a $f(x) \leq x$ pour tout $x \in I$ (rappelons en effet l'inégalité classique $\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| \leq |x|$). On en déduit que la suite (u_n) prend toutes ses valeurs dans l'intervalle I, et qu'elle est décroissante. Comme elle est décroissante et minorée, elle converge donc vers un point adhérent à I (c'est-à-dire appartenant à $\overline{I} = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$) et qui est un point fixe de f. On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, car c'est le seul point fixe de f.

• La première série considérée est "télescopique", exprimons en effet sa somme partielle d'ordre n :

$$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \big[\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)\big] = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0) \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad -\infty$$

puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Cette série (à termes négatifs) est donc divergente.

• Reprenons le terme général de la série précédente, et faisons-en un petit développement limité : puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, il est légitime d'écrire

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= \ln\left(\frac{\sin u_n}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{u_n - \frac{1}{6}u_n^3 + o(u_n^3)}{u_n}\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{6}\,u_n^2 + o(u_n^2)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6}\,u_n^2\,. \end{aligned}$$

Autrement dit, $u_n^2 \sim -6 \ \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Ce sont des séries à termes positifs, le critère des équivalents s'applique donc : les deux séries sont de même nature, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n^2$ diverge.

- Comme $0 < u_n \leq 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < u_n^2 < u_n$: la divergence de $\displaystyle\sum_n u_n^2$ entraîne alors la divergence de la série $\displaystyle\sum_n u_n$.

---

9. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}(k)$.

a. Donner un équivalent de S_n.

b. Montrer qu'il existe un réel α tel que l'on ait le développement asymptotique

$$S_n = \frac{n\pi}{2} - \ln(n) + \alpha + o(1) .$$

- -

a. Le résultat est $S_n \sim \dfrac{n\pi}{2}$. Voici différentes façons d'y parvenir:

- le plus rapide (*mais hors programme*) est sans doute d'utiliser le théorème de Cesáro: comme $\text{Arctan}(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$, ce théorème donne $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}(k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$, d'où le résultat.

- faire une comparaison série-intégrale (*dans la lettre et l'esprit du programme, mais un peu long!*): la fonction Arctan est croissante, on déduit facilement que

$$\int_0^n \text{Arctan}(t)\ \mathrm{d}t \leq S_n \leq \int_1^{n+1} \text{Arctan}(t)\ \mathrm{d}t\ ,$$

on calcule ces intégrales (une i.p.p.) et on conclut que $S_n \sim \dfrac{\pi}{2}\ \text{Arctan}(n) \sim \dfrac{n\pi}{2}$.

- utiliser (*après l'avoir démontrée*) la relation $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ pour $x > 0$. On a alors $S_n = \dfrac{n\pi}{2} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}\left(\frac{1}{k}\right)$ et, comme $\text{Arctan}(x) \leq x$ pour $x \geq 0$, on a alors $0 \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}\left(\frac{1}{k}\right) \leq H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et, comme il est connu (*?*) que $H_n \sim \ln(n)$, on déduit que le terme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}\left(\frac{1}{k}\right)$ est négligeable devant $\dfrac{n\pi}{2}$, ce qui suffit.

- il y a sûrement encore plein d'autres méthodes!

b. Reprenons la dernière méthode envisagée. On a $\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{1}{k} + r_k$ avec $r_k = o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$, donc

$$S_n = \frac{n\pi}{2} - \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{n\pi}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} r_k \ .$$

Comme $r_k = o\Big(\dfrac{1}{k^2}\Big)$, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} r_k$ converge, notons σ sa somme. Le développement asymptotique $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ étant connu, avec γ constante d'Euler, nous avons donc

$$S_n = \frac{n\pi}{2} - \ln(n) - (\sigma + \gamma) + o(1) \ ,$$

ce qui correspond aux attentes de l'énoncé, avec $\alpha = -(\sigma + \gamma)$.

---

10. Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ une série à termes strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$v_n = \frac{u_n}{u_1 + \cdots + u_n} \ .$$

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. *En cas de divergence, on pourra considérer l'expression* $\ln(1 - v_n)$.

- -

- Si $\sum u_n$ converge, l'encadrement $0 \leq v_n \leq \dfrac{u_n}{u_1}$ montre la convergence de la série $\sum v_n$.
- Supposons $\sum u_n$ divergente. Remarquons que $1 - v_n > 0$ pour tout n et

$$\ln(1 - v_n) = \ln\left(\frac{u_1 + \cdots + u_{n-1}}{u_1 + \cdots + u_n}\right) = \ln(u_1 + \cdots + u_{n-1}) - \ln(u_1 + \cdots + u_n) \ .$$

La série $\sum \ln(1 - v_n)$ est donc une série télescopique, et elle est divergente puisque la suite associée $\big(\ln(u_1 + \cdots + u_n)\big)$ diverge (et, plus précisément, tend vers $+\infty$). Examinons alors deux cas:

- si (v_n) tend vers zéro, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(1 - v_n)$ donc $\sum v_n$ diverge par le critère des équivalents des séries à termes positifs ;

- si (v_n) ne tend pas vers zéro, alors la série $\sum v_n$ est grossièrement divergente.

En conclusion, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont, dans tous les cas, de même nature.

---

11. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Convergence et calcul de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{x}{2^n}\right)$.

- -

Notons d'abord que, pour tout n, $\dfrac{x}{2^n} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, intervalle dans lequel le cosinus reste positif, ce qui garantit la bonne définition du terme général. Lorsque t tend vers 0, on a

$$\ln\big(\cos(t)\big)=\ln\Big(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\Big)=-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\underset{t\to 0}{\sim}-\frac{t^2}{2}\ .$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x}{2^n}=0$, on peut utiliser ce développement limité en 0, on en déduit que $\ln\Big(\cos\dfrac{x}{2^n}\Big)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\dfrac{x^2}{2^{2n+1}}$, ce qui garantit la convergence de la série à étudier.

Le calcul de la somme se fait grâce à une astuce: exprimons une somme partielle

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\ln\Big(\cos\frac{x}{2^k}\Big)=\ln\Big(\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}\Big)\ .$$

Or, la relation $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$ permet d'écrire $\cos(a)=\dfrac{\sin(2a)}{2\ \sin(a)}$ lorsque $\sin(a)\neq 0$, i.e. a réel non multiple de π. Donc

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\Big(\dfrac{x}{2^{k-1}}\Big)}{2\ \sin\Big(\dfrac{x}{2^k}\Big)}=\frac{\sin(x)}{2^n\ \sin\Big(\dfrac{x}{2^n}\Big)}\ ,$$

en observant un "produit télescopique". En utilisant enfin $\sin(t)\underset{t\to 0}{\sim}t$, on déduit

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}\Big)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{2^n\ \sin\Big(\dfrac{x}{2^n}\Big)}\right)=\frac{\sin(x)}{x}\ ,$$

puis, par continuité de la fonction logarithme, $S(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)=\ln\Big(\dfrac{\sin(x)}{x}\Big)$.

12*. Soit $\sum\limits_{n\geq 0}u_n$ une série à termes strictement positifs. On pose $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}u_k$ pour tout n.

a. Montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_{n-1}}$ est de même nature que la série $\sum u_n$.

En cas de divergence de cette dernière, on écrira un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{\mathrm{d}t}{t}$.

b. On suppose que la série $\sum u_n$ diverge. Montrer que, pour tout $\alpha>1$, la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n^{\alpha}}$ converge.

c. On suppose que la série $\sum u_n$ converge, on pose $R_n=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}u_k$ pour tout n. Montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{R_n}$ est divergente.

- -

a. • Si la série $\sum\limits_{n\geq 0}u_n$ converge, notons S sa somme. On a alors $\dfrac{u_n}{S_{n-1}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{u_n}{S}$, donc la série $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{u_n}{S_{n-1}}$ est de même nature que $\sum u_n$, donc convergente.

• Supposons la série $\sum u_n$ divergente, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ étant décroissante sur $[S_{n-1}, S_n]$, on a l'encadrement

$$\frac{u_n}{S_n} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{u_n}{S_{n-1}}\ .$$

L'inégalité de gauche ne sert à rien, mais la série de terme général $v_n = \displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge: en effet, il s'agit d'une série télescopique puisque $v_n = \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$. Or, la suite de terme général $\ln(S_n)$ diverge (elle tend vers $+\infty$), la série télescopique associée $\sum v_n$ diverge donc aussi, puis la série $\sum \dfrac{u_n}{S_{n-1}}$ est aussi divergente, par comparaison de séries à termes positifs.

b. Reprenons les mêmes idées. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ étant décroissante sur $[S_{n-1}, S_n]$, on a l'inégalité

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}\ .$$

La série de terme général $v_n = \displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}\left(S_{n-1}^{1-\alpha} - S_n^{1-\alpha}\right)$ converge puisque la suite $(S_n^{1-\alpha})$ est convergente (de limite nulle). On déduit, par comparaison de séries à termes positifs, que la série $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.

Remarque. Avec $\alpha > 1$, la série $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ est en fait toujours convergente, le cas où la série $\sum u_n$ converge étant immédiat à traiter.

c. On ne change pas vraiment une équipe qui gagne! La suite (R_n) est positive décroissante et tend vers 0. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a pour tout $n \geq 1$,

$$\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{R_{n-1} - R_n}{R_n} = \frac{u_n}{R_n}\ .$$

La série de terme général $\displaystyle\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(R_{n-1}) - \ln(R_n)$ diverge car $\ln(R_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{u_n}{R_n}$ est aussi divergente.

Séries à termes quelconques. Convergence absolue.

13. On rappelle le développement asymptotique $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

a. Soit $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{3k-1}{3k}\right)$. Montrer qu'il existe des constantes a et b telles que

$$\ln(u_n) = a\ \ln(n) + b + o(1)\ .$$

b. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

- -

a. On a

$$\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{3k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{3k} + r_k\right)\ ,$$

avec $r_k = \ln\left(1 - \frac{1}{3k}\right) + \frac{1}{3k} = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$. La série $\sum_{k\geq 1} r_k$ est donc convergente, notons R sa somme. Alors

$$\ln(u_n) = -\frac{1}{3}H_n + \sum_{k=1}^{n} r_k = -\frac{1}{3}\left(\ln(n) + \gamma + o(1)\right) + \left(R + o(1)\right)\ .$$

On obtient donc le développement demandé avec $a = -\frac{1}{3}$ et $b = R - \frac{\gamma}{3}$.

b. On a donc $u_n = e^{\ln(u_n)} = e^{a\ \ln(n)}\ e^b\ e^{o(1)}$. Le facteur $e^{o(1)}$ tend vers 1, on peut donc écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^b\ n^a$, soit $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{n^{1/3}}$ avec $K > 0$. Par comparaison à une série de Riemann, on déduit la divergence de la série $\sum u_n$.

14.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier relatif pair.

b. En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \sin\left((2+\sqrt{3})^n\pi\right)$.

- -

a. On développe par la formule du binôme de Newton:

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ 2^{n-k}\ (\sqrt{3})^k + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\ 2^{n-k}\ (\sqrt{3})^k \\ &= 2\sum_{p=0}^{N} \binom{n}{2p}\ 2^{n-2p}\ 3^p\end{aligned}$$

en posant $N = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, et en réindexant avec $p = 2k$ puisque seuls les termes d'indices pairs apportent une contribution. Les coefficients binomiaux étant des entiers naturels, on observe que le résultat est un entier relatif pair que nous noterons $2K_n$ avec $K_n \in \mathbf{Z}$.

b. La fonction sinus étant 2π-périodique et impaire, on peut écrire

$$u_n = \sin\left(2K_n\pi - (2-\sqrt{3})^n\pi\right) = -\sin\left((2-\sqrt{3})^n\pi\right)\ .$$

Comme $\left|2-\sqrt{3}\right| < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty}((2-\sqrt{3})^n\pi) = 0$ et, en utilisant l'équivalent usuel $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -(2-\sqrt{3})^n\pi$, d'où la convergence absolue de la série de terme général u_n (comparaison à une série géométrique convergente).

15. Déterminer la nature des séries suivantes et, en cas de convergence, calculer leur somme :

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$; **b)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \big(\ln n + a\ \ln(n+1) + b\ \ln(n+2)\big)$ avec a et b réels.

- -

a. Posons $u_n = \dfrac{1}{(3n+1)(3n+4)}$. On a $u_n \sim \dfrac{1}{9n^2}$, ce qui assure déjà la convergence de la série.

Décomposons en éléments simples : $u_n = \dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{1}{3n+1} - \dfrac{1}{3n+4}\Big) = \dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{1}{3n+1} - \dfrac{1}{3(n+1)+1}\Big)$.

Si l'on note S_n la somme partielle d'ordre n, on observe un télescopage :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{3}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3k+1} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3(k+1)+1}\Big) = \frac{1}{3}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3k+1} - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{3k+1}\Big) = \frac{1}{3}\Big(1 - \frac{1}{3n+4}\Big)\ .$$

Il s'ensuit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{3}$, c'est-à-dire que $\displaystyle S = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{1}{3}$.

b. Posons $u_n = \ln n + a\ \ln(n+1) + b\ \ln(n+2)$, et cherchons-en un équivalent!

En utilisant le DL “fort” à l'ordre un en zéro de $\ln(1+x)$, soit $\ln(1+x) = x + O(x^2)$, on obtient

$$\begin{aligned} u_n &= (1+a+b)\ \ln(n) + a\ \ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) + b\ \ln\Big(1+\frac{2}{n}\Big) \\ &= (1+a+b)\ \ln(n) + a\ \Big(\frac{1}{n} + O\big(\frac{1}{n^2}\big)\Big) + b\ \Big(\frac{2}{n} + O\big(\frac{1}{n^2}\big)\Big) \\ &= (1+a+b)\ \ln(n) + \frac{a+2b}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\ . \end{aligned}$$

On en déduit la discussion suivante:

- si $a+b+1 \neq 0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$, la série est donc grossièrement divergente ;

- si $a+b+1 = 0$ et $a+2b \neq 0$, alors $u_n \sim (a+2b)\dfrac{1}{n}$. Par comparaison à la série harmonique, on déduit que $\sum u_n$ diverge. *Le critère des équivalents s'applique car l'équivalent trouvé montre que u_n reste de signe constant à partir d'un certain rang.*

- si $a+b+1 = 0$ et $a+2b = 0$, alors $u_n = O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$, la série $\sum u_n$ est alors absolument convergente.

Bilan. La série $\sum u_n$ converge *si et seulement si* $a = -2$ et $b = 1$.

Posons donc maintenant $u_n = \ln n - 2\ln(n+1) + \ln(n+2)$. On constate que $u_n = v_n - v_{n+1}$ en posant $v_n = \ln(n) - \ln(n+1)$, on reconnaît donc une série télescopique. Si on note S_n sa somme partielle d'ordre n, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}(v_k - v_{k+1}) = v_1 - v_{n+1} = \ln(n+2) - \ln(n+1) - \ln(2) = \ln\Big(\frac{n+2}{n+1}\Big) - \ln(2)\ .$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\ln(2)$, c'est-à-dire $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln(2)$.

---

16. Déterminer la nature des séries $\sum_n u_n$ dans chacun des cas suivants :

a) $u_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}$; **b)** $u_n = \ln n \cdot \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$; **c)** $\sin\left(\dfrac{\pi\, n^2}{n+1}\right)$.

- -

a. On recherche un équivalent de u_n en écrivant

$$u_n = n\left(\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{1/3} - \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\right) = n\left(1+\frac{1}{3n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big) - 1 - \frac{1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right),$$

donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$. Comme on travaille ici sur des séries dont le terme général est de signe constant, ces deux séries sont de même nature, donc $\sum u_n$ diverge.

b. En utilisant le DL: $\ln(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ lorsque x tend vers zéro, on obtient $u_n = v_n + w_n$, avec $v_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ et $w_n = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\ln(n)}{n} + o\Big(\dfrac{\ln(n)}{n}\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2}\dfrac{\ln(n)}{n}$.
La série $\sum v_n$ converge en vertu du théorème spécial des séries alternées, puisque la suite $\left(\dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right)$ décroît à partir d'un certain rang (étudier la fonction associée) et tend vers zéro. Pour la série $\sum w_n$ (dont les termes sont négatifs APCR), le critère des équivalents s'applique ; or, la série $\sum \dfrac{\ln(n)}{n}$ diverge puisque $\dfrac{\ln(n)}{n} > \dfrac{1}{n}$, donc $\sum w_n$ diverge. Finalement, $\sum u_n$ diverge.

c. En écrivant $n^2 = (n-1)(n+1)+1$, on obtient

$$u_n = \sin\left((n-1)\pi + \frac{\pi}{n+1}\right) = (-1)^{n+1}\,\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

Or, la suite $\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)\right)$ est décroissante et tend vers 0, donc $\sum u_n$ converge.

---

17. Donner un développement limité de $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{1+x}$ sous la forme $f(x) = a+bx+cx^2+O(x^3)$.

En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$, avec $u_n = \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}\,\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{(-1)^n+\sqrt{n}}$.

- -

Écrivons $\dfrac{\sin x}{1+x} = (\sin x)(1+x)^{-1}$ et développons chacun des facteurs à l'ordre deux au voisinage de zéro :

$$\frac{\sin x}{1+x} = \left(x+O(x^3)\right)\left(1-x+x^2+O(x^3)\right) = x - x^2 + O(x^3)\,.$$

Notons à ce sujet que, d'après la formule de Taylor-Young, toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle contenant 0 admet en ce point un développement limité à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, que l'on peut écrire $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$, *mais qui peut s'écrire aussi* $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + O(x^{n+1})$, *ce qui donne une information un peu plus précise sur le comportement du reste.*

En divisant numérateur et dénominateur par $\sqrt{n}$ et en utilisant le fait que la fonction sinus est impaire, on peut écrire

$$u_n = \frac{(-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{\sin\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)}{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = f\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$, le DL ci-dessus fournit un développement asymptotique de u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = x_n + y_n + z_n \ :$$

la série de terme général $x_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (*critère spécial des séries alternées*), la série de terme général $z_n = O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ converge absolument (*comparaison à une série de Riemann d'exposant* $\dfrac{3}{2}$, *convergente*) ; par contre, la série de terme général $y_n = -\dfrac{1}{n}$ est divergente. On en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge.

---

18. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$, avec $u_n = (-1)^n \left(\operatorname{Arccos}\dfrac{1}{n} - \operatorname{Arccos}\dfrac{1}{n^2}\right)$.

- -

Lorsque $n \to +\infty$, $\dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n^2}$ tendent vers zéro, on aura sûrement des renseignements sur le comportement asymptotique du terme général u_n en partant d'une étude locale de la fonction Arccos au voisinage de 0. Vous ne connaissez pas son DL ? Pas grave, on connaît la dérivée : sur $]-1,1[$, la fonction Arccos est dérivable et $(\operatorname{Arccos})'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On peut donc développer cette dérivée :

$$(\operatorname{Arccos})'(x) = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right),$$

donc, par intégration de ce DL (en n'oubliant pas la constante!), on a le DL :

$$\operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad \text{en fait on se contentera de} \quad \operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - x + o(x^2).$$

On a alors

$$u_n = (-1)^n \left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - \left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right] = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) .$$

On en déduit la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$, comme somme de deux séries convergentes (la première par le critère des séries alternées, la deuxième absolument convergente par comparaison à une série de Riemann).

---

19. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1 - t^2} \, dt$.

a. Montrer que la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge.

b. Exprimer la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$, puis la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ sous forme d'intégrales.

c. Calculer S. *On pourra utiliser le changement de variable* $t = \cos(2u)$.

- -

a. On a $0 \leq a_n \leq \int_0^1 t^n \, dt = \frac{1}{n+1}$, donc $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$. Par ailleurs,

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^1 t^n \, (t-1) \sqrt{1 - t^2} \, dt \leq 0 ,$$

la suite (a_n) est donc décroissante. Par le critère spécial des séries alternées, on déduit que la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge.

b. Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k \right) \sqrt{1 - t^2} \, dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1 - (-t)} \sqrt{1 - t^2} \, dt \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - t^2}}{1 + t} \, dt + R_n , \end{aligned}$$

en posant $R_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1} \sqrt{1 - t^2}}{1 + t} \, dt$ (*on aura reconnu, en effet, une série géométrique de raison* $-t$). Enfin, sur $[0, 1]$, on a $\sqrt{1 - t^2} \leq 1$ et $1 + t \geq 1$ donc $\frac{\sqrt{1 - t^2}}{1 + t} \leq 1$, d'où $|R_n| \leq \int_0^1 t^{n+1} \, dt = \frac{1}{n+2}$, donc $\lim_{n \to +\infty} R_n = 0$, ce qui montre que

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k = \lim_{n \to +\infty} S_n = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - t^2}}{1 + t} \, dt .$$

c. Calculons $S = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t$. Différents changements de variable sont envisageables pour calculer cette intégrale, par exemple poser $t = \cos 2u$, soit $u = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Arccos}\,t$. Le lecteur expert en trigonométrie s'assurera que l'on obtient ainsi $S = 4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 u\,\mathrm{d}u$, il ne reste plus qu'à linéariser $\sin^2 u$, et finalement $S = \dfrac{\pi}{2} - 1$.

---

20. Soit x un réel non multiple de 2π. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

a. Montrer que la suite (S_n) est bornée.

b. En remarquant que $\cos(nx) = S_n - S_{n-1}$, montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{\cos(nx)}{n}$ est convergente.

c. En exploitant l'inégalité $|\cos(\theta)| \geq \cos^2(\theta)$, montrer la divergence de la série $\sum |u_n|$.

- -

a. Un calcul classique, utilisant l'exponentielle complexe, donne $S_n = \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\,\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Donc $|S_n| \leq \dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$ et la suite (S_n) est bornée.

b. Exprimons une somme partielle de la série à étudier:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k - S_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{S_{k-1}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{k+1} = -S_0 + \frac{S_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) S_k \\
&= \frac{S_n}{n} - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k(k+1)}\ .
\end{aligned}$$

De **a.**, on déduit que $\dfrac{S_k}{k(k+1)} = O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$, la série de terme général $\dfrac{S_k}{k(k+1)}$ est donc convergente. Comme (S_n) est bornée, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 0$. Les sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ admettent donc une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$, ce qu'il fallait démontrer.

c. On a $|u_n| = \dfrac{|\cos(nx)|}{n} \geq \dfrac{\cos^2(nx)}{n} = \dfrac{1+\cos(2nx)}{2n}$. Distinguons deux cas:

- si x est multiple de π, on a $|u_n| = \dfrac{1}{n}$, d'où la divergence ;

- sinon, la série $\sum \dfrac{\cos(2nx)}{2n}$ converge d'après **b.**, alors que $\sum \dfrac{1}{2n}$ diverge. Par somme, la série à termes positifs $\sum \dfrac{1+\cos(2nx)}{2n}$ diverge, puis $\sum |u_n|$ diverge par comparaison.

21*.a. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\, e^{int}\, \mathrm{d}t = 0$.

b. Soit $x \in]0, 2\pi[$, soit n un entier naturel non nul. Prouver l'identité

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikx} - e^{ik\pi}}{ik} = -\frac{1}{2i} \int_\pi^x \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin\frac{t}{2}} (1 - e^{int})\, \mathrm{d}t\ .$$

c. Convergence et somme de $S(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k}$.

- -

a. Par une i.p.p., on obtient

$$\int_a^b f(t)\, e^{int}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{in}\left(\Big[f(t)\, e^{int}\Big]_a^b - \int_a^b f'(t)\, e^{int}\, \mathrm{d}t \right)\ ,$$

d'où la majoration $\left| \displaystyle\int_a^b f(t)\, e^{int}\, \mathrm{d}t \right| \leq \dfrac{C}{n}$, avec par exemple

$$C = \big|f(a)\big| + \big|f(b)\big| + \int_a^b \big|f'(t)\big|\, \mathrm{d}t\ ,$$

et la conclusion en découle.

b. Calculons:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikx} - e^{ik\pi}}{ik} &= \sum_{k=1}^{n} \int_\pi^x e^{ikt}\, \mathrm{d}t \ = \ \int_\pi^x e^{it} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikt} \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_\pi^x e^{it} \frac{1 - e^{int}}{1 - e^{it}}\, \mathrm{d}t \ = \ \int_\pi^x e^{i\frac{t}{2}}\, \frac{1 - e^{int}}{-2i\, \sin\frac{t}{2}}\, \mathrm{d}t\ ,
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

c. Soit $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikx}}{k}$ la somme partielle d'ordre n. D'après **b.**, on peut écrire

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\pi}}{k} - \frac{1}{2} \int_\pi^x \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin\frac{t}{2}}\, \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \int_\pi^x \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin\frac{t}{2}}\, e^{int}\, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} - \frac{1}{2} \int_\pi^x \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\, \mathrm{d}t - \frac{1}{2}\, i(x - \pi) + \frac{1}{2} \int_\pi^x \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin\frac{t}{2}}\, e^{int}\, \mathrm{d}t\ .
\end{aligned}$$

Lorsque n tend vers l'infini, la dernière intégrale tend vers 0 d'après **a.** puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin\dfrac{t}{2}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\pi, x]$ ou $[x, \pi]$. Il est classique (!?) que la série harmonique alternée converge et a pour somme $\ln(2)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}\right) = \ln(2)$, on en déduit la convergence de la suite $\big(S_n(x)\big)$ et

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{ikx}}{k} = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = -\ln(2) - \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right) - \frac{i}{2}(x-\pi)\ .$$

Ainsi, pour $x \in]0, 2\pi[$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(kx)}{k} = -\ln(2) - \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}$.

Autres exercices sur les séries.

22. On note l^1 l'ensemble des suites réelles **sommables**, c'est-à-dire des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ soit absolument convergente.

On note l^2 l'ensemble des suites réelles **de carré sommable**, c'est-à-dire des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n^2$ soit (absolument) convergente.

a. Montrer que l^1 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b. Montrer que $l^1 \subset l^2$, et montrer que cette inclusion est stricte.

c. Soient $u \in l^2$, $v \in l^2$. Montrer que $uv \in l^1$, où uv est la suite réelle définie par $(uv)_n = u_n v_n$.

d. En déduire que l^2 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

e. Pour $u \in l^2$, $v \in l^2$, on pose $< u, v > = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur l^2.

- -

a. On a $0 \in l^1$ donc $l^1 \neq \emptyset$. Si $u \in l^1$, il est clair que $\lambda u \in l^1$ pour tout λ réel. Enfin, si u et v sont dans l^1, alors les séries $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ sont convergentes donc la série $\sum \big(|u_n| + |v_n|\big)$ converge ; de l'inégalité triangulaire $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n|$, on déduit, par comparaison de séries à termes positifs, que $u + v \in l^1$. L'ensemble l^1 est donc un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

b. Si $u \in l^1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a donc $|u_n| \leq 1$ à partir d'un certain rang. Pour n assez grand, il vient alors $0 \leq u_n^2 \leq |u_n|$. Par comparaison de séries à termes positifs, on déduit que $\sum u_n^2$ converge. On a ainsi prouvé l'inclusion $l^1 \subset l^2$. L'inclusion est stricte puisque la suite u définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ est de carré sommable, mais n'est pas sommable.

c. On a $|u_n v_n| \leq \dfrac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2)$, conséquence de l'identité remarquable

$$\big(|u_n| - |v_n|\big) = u_n^2 - 2|u_n|\,|v_n| + v_n^2 \geq 0\ .$$

Si u et v appartiennent à l^2, on obtient ainsi que la série $\sum |u_n v_n|$ converge, donc $uv \in l^1$.

d. On a $0 \in l^2$ donc $l^2 \neq \emptyset$. Si $u \in l^2$, il est clair que $\lambda u \in l^2$ pour tout λ réel. Enfin, si u et v sont dans l^2, alors la série $\sum u_n v_n$ converge (absolument) d'après **c.**, et de $(u_n + v_n)^2 = u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2$, on déduit que la série $\sum (u_n + v_n)^2$ est convergente, donc $u + v \in l^2$. Ainsi, l^2 est bien un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

e. Si u et v sont dans l^2, alors la série $\sum u_n v_n$ converge d'après **c.**, donc $< u, v >$ est bien défini. Le caractère bilinéaire de $< \cdot, \cdot >$ est une formalité. On a $< u, u >= \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \geq 0$ et, si cette expression est nulle, alors tous les termes sont nuls (*somme de termes positifs*), donc $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_n = 0$, soit $u = 0$. On a ainsi prouvé le caractère défini positif, on a bien affaire à un produit scalaire sur l'espace vectoriel l^2.

23*. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles ou complexes, on suppose que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ et que la suite (v_n) est sommable. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = 0$.

- -

La suite (u_n) est bornée car elle est convergente. Notons $U = \displaystyle\sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

Posons par ailleurs $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|$.

Donnons-nous $\varepsilon > 0$, il existe alors un rang N à partir duquel $|u_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2S}$. *Le cas $S = 0$ ne se produit que si (v_n) est la suite nulle, auquel cas l'exercice est trivial.* Pour $n \geq N$, on a alors

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \right| &\leq \left| \sum_{k=0}^{N-1} u_k v_{n-k} \right| + \left| \sum_{k=N}^{n} u_k v_{n-k} \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{N-1} |u_k|\,|v_{n-k}| + \sum_{k=N}^{n} |u_k|\,|v_{n-k}| \\
&\leq U \sum_{k=0}^{N-1} |v_{n-k}| + \frac{\varepsilon}{2S} \sum_{k=N}^{n} |v_{n-k}| \\
&\leq U \sum_{k=0}^{N-1} |v_{n-k}| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

puisque $\displaystyle\sum_{k=N}^{n} |v_{n-k}| \leq \sum_{j=0}^{+\infty} |v_j| = S$.

Enfin, $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} |v_{n-k}| = \sum_{j=n-N+1}^{n} |v_j| \leq \sum_{j=n-N+1}^{+\infty} |v_j| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque le reste d'ordre n d'une série convergente tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Il existe donc un entier N' tel que, pour tout $n \geq N'$, on ait $U \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} |v_{n-k}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geq \max\{N, N'\}$, on a alors $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right| \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = 0$.

---

24. On admet le développement asymptotique $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$, où $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a. En déduire la somme de la série harmonique alternée

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

b. On modifie l'ordre des termes de cette dernière série de la façon suivante:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{6} + \cdots$$

Montrer que la nouvelle série obtenue converge et calculer sa somme.

c. Plus généralement, soient p et q deux entiers naturels non nuls. On considère une série construite à partir de la série harmonique alternée en sommant alternativement p termes impairs (positifs), puis q termes pairs (négatifs), et ainsi de suite. Quelle est la somme de cette série ?

- -

a. Notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ la somme partielle d'ordre n de cette nouvelle série. On a alors

$$S_{2n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \left(H_{2n} - \frac{1}{2}H_n\right) - \frac{1}{2}H_n = H_{2n} - H_n,$$

d'où le développement asymptotique

$$S_{2n} = \big(\ln(2n) + \gamma + o(1)\big) - \big(\ln(n) + \gamma + o(1)\big) = \ln(2) + o(1)\ ,$$

soit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \ln(2)$. Comme $S_{2n+1} = S_{2n} + \dfrac{1}{2n+1}$, on a aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \ln(2)$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(2)$, soit $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

b. Notons u_k le k-ème terme de cette série, ainsi $u_1 = 1$, $u_2 = \dfrac{1}{3}$, $u_3 = -\dfrac{1}{4}$, $u_4 = \dfrac{1}{5}$, etc. et posons $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ la somme partielle d'ordre n. Ainsi,

$$U_{3n} = \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{6} + \cdots + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1}\right) - \frac{1}{2n}\ .$$

On a alors $U_{3n}=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\left(H_{4n}-\frac{1}{2}H_{2n}\right)-\frac{1}{2}H_n,$ donc

$$U_{3n}=\ln(4n)+\gamma-\frac{1}{2}\big(\ln(2n)+\gamma+\ln(n)+\gamma\big)+o(1)=\frac{3}{2}\ln(2)+o(1)\ .$$

Comme en **b.**, on conclut que la somme de la série proposée est $U=\frac{3}{2}\ln(2)$.

c. La somme partielle d'ordre $n(p+q)$ est constituée de la somme des inverses des np premiers entiers naturels impairs, à laquelle on retranche la somme des inverses des nq premiers entiers naturels (non nuls) pairs. Cela s'écrit

$$\begin{aligned}
V_{n(p+q)} &= \left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2np-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2nq}\right)\\
&= \left(H_{2np}-\frac{1}{2}H_{np}\right)-\frac{1}{2}H_{nq}\\
&= \ln(2np)+\gamma-\frac{1}{2}\ln(np)-\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2}\ln(nq)-\frac{1}{2}\gamma+o(1)\ ,
\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}V_{n(p+q)}=\ln(2)+\frac{1}{2}\big(\ln(p)-\ln(q)\big)$. Le terme général de la série tendant vers zéro, cette dernière a pour somme $V=\ln(2)+\frac{1}{2}\big(\ln(p)-\ln(q)\big)=\ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$.

---

25. Pour p entier naturel, on pose $S(p)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{n^p}{n!}$. Montrer que, pour tout p entier naturel, il existe un entier naturel K_p tel que $S(p)=K_p\,e$.

- -

Notons d'abord qu'en posant $a_n=\frac{n^p}{n!}$, on a facilement $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0$, donc la série $\sum a_n$ converge, et $S(p)$ est bien défini pour tout p. On a $S(0)=e$ puisque l'on reconnaît une série exponentielle. Démontrons la propriété demandée par récurrence forte:

- c'est vrai pour $n=0$ avec $K_0=1$;

- soit $p\in\mathbb{N}^*$, si c'est vrai pour tous les entiers k de 0 à p; montrons-le au rang $p+1$. On a

$$\begin{aligned}
S(p+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^{p+1}}{n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{p+1}}{n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot n^p}{n\,(n-1)!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^p}{(n-1)!} && (*)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)^p}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}n^k\right] && (**)\\
&= \sum_{k=0}^{p}\left[\binom{p}{k}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^k}{n!}\right] && (***)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} S(k) = K_{p+1}\, e \,, \qquad (****)$$

avec $K_{p+1} = \sum_{0}^{p} \binom{p}{k} K_k \in \mathbb{N}$, ce qui achève la récurrence.

(*) *par simplification*

(**) *par décalage d'indice et développement par la formule du binôme*

(***) *par interversion de sommations, l'une d'elles étant finie*

(****) *grâce à l'hypothèse de récurrence*