# ALGÈBRE LINÉAIRE (programme de 1ère année PCSI)

## I. Structure d'espace vectoriel

### 1. Définition

Dans tout ce qui suit, la notation $\mathbb{K}$ représentera, soit le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, soit le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

**Remarque.** Je ne donnerai pas de définition formalisée de ce que l'on appelle un **corps** (hors programme), mais disons grosso modo qu'il s'agit d'un ensemble dans lequel il est possible de définir les quatre opérations usuelles (addition, soustraction, multiplication, division) à l'exclusion toutefois de la division par 0 (élément neutre de l'addition), les opérations d'addition et de multiplication possédant les propriétés usuelles de commutativité, associativité et distributivité.

**Définition.** On dit qu'un ensemble $E$ est muni d'une structure d'**espace vectoriel** sur le corps $\mathbb{K}$ (en abrégé de $\mathbb{K}$-e.v.) s'il est muni d'une loi de composition interne notée $+$ (addition) et d'une loi externe à opérateurs dans $\mathbb{K}$ (multiplication par les “scalaires”) vérifiant les axiomes suivants :

**(1)** : $(E,+)$ est un groupe commutatif

**(2)** : $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2 \quad \forall x\in E \qquad (\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$

**(3)** : $\forall\lambda\in\mathbb{K} \quad \forall(x,y)\in E^2 \qquad \lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$

**(4)** : $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2 \quad \forall x\in E \qquad \lambda(\mu\, x)=(\lambda\mu)\, x$

**(5)** : $\forall x\in E \qquad 1\cdot x=x.$

**Commentaires.** Il est d'usage d'appeler **scalaires** les éléments de $\mathbb{K}$ et **vecteurs** les éléments de $E$. L'axiome **(1)** signifie qu'il est possible d'ajouter deux vecteurs entre eux, que cette addition est commutative et associative, qu'elle possède un élément neutre (le “vecteur nul”, souvent noté $0_E$), et que tout vecteur $x$ possède un “symétrique” ou **opposé**, noté $-x$. L'axiome **(2)** est la **distributivité** de la multiplication (externe) par rapport à l'addition des scalaires. L'axiome **(3)** est la **distributivité** de cette multiplication externe par rapport à l'addition des vecteurs. L'axiome **(4)** s'appelle parfois **associativité mixte**.

**Remarque.** Dans les exercices et problèmes, il est très rarement nécessaire de revenir à ces axiomes pour montrer qu'un ensemble $E$ est muni d'une structure d'espace vectoriel. La plupart du temps, on se contentera de montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel d'un e.v. déjà connu.

**Exemples de référence.** Les ensembles $\mathbb{K}^n$ (avec $n\in\mathbb{N}^*$), $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^\Omega=\mathcal{F}(\Omega,\mathbb{K})$ avec $\Omega$ ensemble non vide, sont munis d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En particulier, avec $\Omega=\mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est l'e.v. des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si $n$ et $p$ sont deux entiers naturels non nuls, l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices de format $n\times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, est aussi muni d'une structure de $\mathbb{K}$-e.v.

Les opérations fondamentales de la structure d'espace vectoriel sont donc l'addition interne des vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un scalaire. En combinant ces deux opérations, on définit la notion de **combinaison linéaire** de vecteurs : si $(x_1,\cdots,x_n)$ est une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v. $E$, on appelle combinaison linéaire de $x_1,\cdots,x_n$ tout vecteur $x$ de $E$ qu'il est possible d'écrire sous la forme d'une somme $x=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k$, où les $\lambda_k$ $(1\le k\le n)$ sont des scalaires.

### 2. Sous-espaces vectoriels.

**Définition.** Soit $F$ une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. On dit que $F$ est un **sous-espace vectoriel** de $E$ (en abrégé un **s.e.v.**) si $F$ est non vide et stable par combinaisons linéaires, i.e.

$$\forall(x,y)\in F^2 \quad \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2 \qquad \lambda x+\mu y\in F\ .$$

**Remarque.** Noter qu'un s.e.v. de $E$ contient toujours le vecteur nul $0_E$!

**Remarque.** Au lieu de montrer la stabilité par combinaisons linéaires, on peut montrer séparément la stabilité par addition et la stabilité par multiplication par les scalaires.

***Exemples élémentaires.*** Le singleton $\{0_E\}$ est un s.e.v. de $E$, dit **sous-espace nul**.
Si $a$ est un vecteur **non nul** de $E$, l'ensemble des vecteurs colinéaires à $a$ est un s.e.v. de $E$, appelé **droite vectorielle** engendrée par $a$, et noté $\mathrm{Vect}(a)$, ou parfois $\mathbb{K}\, a$. On a alors

$$\mathrm{Vect}(a) = \{\lambda\, a \ ; \ \lambda \in \mathbb{K}\}\ .$$

Pour tout $n$ entier naturel, l'ensemble $\mathbb{K}_n[X] = \big\{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) \leq n\big\}$ est un s.e.v. de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$.

***Exemple.*** L'ensemble $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Les ensembles $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, en sont des sous-espaces vectoriels.

**Propriété et définition.** Soit $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v. $E$. Alors l'ensemble $F$ des combinaisons linéaires des $x_i$, $1 \leq i \leq n$, est un sous-espace vectoriel de $E$. On l'appelle **sous-espace engendré** par la famille $\mathcal{X}$, et on le note $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{X})$, ou encore $F = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$, ou $F = \mathrm{Vect}(x_i)_{1 \leq i \leq n}$.

**Remarque.** Ce sous-espace $F$ est "le plus petit" sous-espace vectoriel de $E$ contenant les $x_i$. Cela signifie que, si un s.e.v. $V$ de $E$ contient les vecteurs $x_i$, alors il contient le sous-espace engendré $\mathrm{Vect}(x_i)$.

**Proposition.** Toute intersection de s.e.v. de $E$ est encore un s.e.v. de $E$.

Précisons un peu cet énoncé: si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de s.e.v. de $E$ (indexée par un ensemble d'indices $I$ quelconque), alors l'intersection de cette famille, à savoir l'ensemble

$$F = \bigcap_{i \in I} F_i = \big\{x \in E \mid \forall i \in I \quad x \in F_i\big\}$$

est encore un s.e.v. de $E$. *La démonstration est facile.*

**Attention!** La réunion de deux s.e.v. de $E$ n'est par contre pas un s.e.v. de $E$ en général! Cela motive l'introduction de la notion de **somme** de deux s.e.v. $F$ et $G$ lorsqu'on cherche à introduire un s.e.v. de $E$ contenant à la fois $F$ et $G$ (*paragraphe suivant*).

***Exercice 1.*** Soient $F$ et $G$ deux s.e.v. de $E$. Montrer que $F \cup G$ est un s.e.v. de $E$ *si et seulement si* on a $F \subset G$ ou $G \subset F$.

### 3. Somme de deux sous-espaces vectoriels

**Définition.** Soient $F$ et $G$ deux s.e.v. d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. On note $F+G$ l'ensemble des vecteurs de $E$ que l'on peut écrire comme somme d'un vecteur de $F$ et d'un vecteur de $G$ :

$$F + G = \big\{x \in E \quad | \quad \exists y \in F\ \exists z \in G \quad x = y + z\big\}$$

ou, plus simplement,

$$F + G = \big\{y + z \quad ; \quad y \in F\ ,\ z \in G\big\}\ .$$

**Proposition.** Si $F$ et $G$ sont deux s.e.v. de $E$, alors l'ensemble $F+G$ est un sous-espace vectoriel de $E$ contenant $F$ et $G$. On l'appelle **somme** des s.e.v. $F$ et $G$.

**Remarque.** $F+G$ est "le plus petit" sous-espace vectoriel de $E$ contenant $F$ et $G$. Cela signifie que, si $V$ est un s.e.v. de $E$ contenant $F$ et $G$, alors il contient $F+G$.

**Définition.** Si $F$ et $G$ sont deux s.e.v. de $E$, on dit que leur somme est une **somme directe** si la décomposition d'un quelconque vecteur de $F+G$ en somme d'un vecteur de $F$ et d'un vecteur de $G$ est unique. On dit encore que $F$ et $G$ "sont en somme directe". Dans ce cas, le sous-espace somme $F+G$ est aussi noté $F \oplus G$.

**Caractérisation.** Deux s.e.v. $F$ et $G$ de $E$ sont en somme directe *si et seulement si* leur intersection est réduite au vecteur nul : $F \cap G = \{0_E\}$.

**Définition.** Deux s.e.v. $F$ et $G$ de $E$ sont dits **supplémentaires** si on a $E = F \oplus G$. Cela signifie donc que l'on a $\begin{cases} F+G &= E \\ F \cap G &= \{0_E\} \end{cases}$. Cela signifie aussi que tout vecteur de $E$ se décompose de façon unique comme somme d'un vecteur de $F$ et d'un vecteur de $G$:

$$\forall x \in E \quad \exists!(y,z) \in F \times G \quad x = y + z \ .$$

*Exemple.* Dans l'e.v. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, le s.e.v. $\mathcal{P}$ constitué des fonctions paires et le s.e.v. $\mathcal{I}$ constitué des fonctions impaires sont supplémentaires, on peut utiliser le **raisonnement par analyse-synthèse** pour le prouver.

*Exemple (voisin du précédent).* Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $n$, le sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques et celui, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, constitué des matrices antisymétriques, sont supplémentaires.

# II. Familles finies de vecteurs

## 1. Familles libres

**Définition.** Une famille finie $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v. $E$ est dite **libre** si la seule combinaison linéaire des $x_k$ qui est nulle est celle dont tous les coefficients sont nuls. Dans ce cas, on dit aussi que les vecteurs $x_1$, $\cdots$, $x_n$ sont **linéairement indépendants**.

Autrement dit, la famille $\mathcal{X}$ est libre *si et seulement si*

$$\forall(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \qquad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E \Longrightarrow \Big(\forall k \in [\![1,n]\!] \quad \lambda_k = 0\Big) \ .$$

**Attention!** La famille $(1, i)$ est libre dans $\mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, elle ne l'est pas dans $\mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

**Définition.** Une famille finie $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ qui n'est pas libre est dite **liée**, on dit aussi que les vecteurs $x_1$, $\cdots$, $x_n$ sont **linéairement dépendants**. Il existe alors des coefficients $\lambda_1$, $\cdots$, $\lambda_n$, **non tous nuls**, tels que l'on ait **(R)**: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E$. La relation **(R)** est une **relation de dépendance linéaire** entre les vecteurs $x_k$. Cela signifie aussi que l'un au moins des vecteurs de la famille $\mathcal{X}$ peut être exprimé comme combinaison linéaire des autres.

En particulier, deux vecteurs $x$ et $y$ sont dits **colinéaires** lorsque la famille $(x, y)$ est liée. Cela signifie que l'un au moins des deux vecteurs peut s'écrire comme produit de l'autre par un scalaire. Cela signifie aussi qu'ils appartiennent à une même droite vectorielle.

De même, trois vecteurs $x$, $y$, $z$ sont dits **coplanaires** lorsque la famille $(x, y, z)$ est liée, cela signifie qu'ils appartiennent tous trois à un même plan vectoriel.

**Remarque.** Toute famille extraite d'une famille libre est encore libre. Toute famille contenant une famille liée est encore liée.

**Proposition (ajout d'un vecteur à une famille libre).** Soit $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ une famille libre dans un e.v. $E$, soit $x_{n+1}$ un vecteur de $E$. La famille $\mathcal{X}' = (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})$ est alors liée *si et seulement si* $x_{n+1} \in \mathrm{Vect}(\mathcal{X})$.

***Exercice 2.*** Soient $r_1$, $\cdots$, $r_n$ des réels distincts. Pour tout $i$, $1 \leq i \leq n$, on note $f_i$ la fonction définie par $f_i(x) = e^{r_i x}$. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f_1, \cdots, f_n)$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

***Exemple à connaître.*** Une famille $(P_0, \cdots, P_n)$ de polynômes de degrés tous distincts est libre dans $\mathbb{K}[X]$, c'est un résultat du cours.

**2. Familles génératrices. Bases**.

**Définition.** On dit qu'une famille $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ de vecteurs de $E$ est **génératrice** si on a $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{E})$, autrement dit si tout vecteur de $E$ est combinaison linéaire des $e_k$, $1 \leq k \leq n$.

**Remarque.** Toute famille contenant une famille génératrice est encore génératrice.

**Définition.** Une **base** de $E$ est une famille de vecteurs qui est à la fois libre et génératrice. Une famille $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est donc une base de $E$ *si et seulement si* tout vecteur de $E$ se décompose, **de façon unique**, comme combinaison linéaire des $x_k$.

**Définition.** Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$, si $x$ est un vecteur de $E$, il existe donc un unique $n$-uplet $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ de scalaires tel que $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ (*attention au changement de notations par rapport au paragraphe précédent*). Les $x_k$, $1 \leq k \leq n$, sont les **coordonnées** du vecteur $x$ dans la base $\mathcal{B}$.

Il est souvent utile de présenter ces coordonnées dans une matrice-colonne

$$X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \; .$$

Certains espaces vectoriels particuliers possèdent une base plus “naturelle” que les autres, que l'on appelle **base canonique**.

Ainsi, la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est $(e_1, \cdots, e_n)$ où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$, le coefficient 1 étant en $i$-ème position. Ainsi, tout élément $x = (x_1, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ se décompose sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Dans l'espace $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus $n$, la base canonique est $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$.

Dans l'espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à $n$ lignes et $p$ colonnes, la base canonique est constituée des matrices élémentaires $E_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$ : la matrice $E_{i,j}$ a tous ses coefficients nuls, sauf celui en position $(i, j)$ qui vaut 1. Ainsi, si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on peut écrire $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} E_{i,j}$.

**Attention!** Dans un espace vectoriel "abstrait" de dimension $n$, cela n'a aucun sens de parler de base "canonique"!!!

***Exemple à connaître.*** Dans $\mathbb{K}_n[X]$, une famille de polynômes est **à degrés échelonnés** si l'on a $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Une telle famille est alors une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$.

**Proposition.** Si $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_k, e_{k+1}, \cdots, e_n)$ est une famille libre dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$, alors les sous-espaces $F = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \cdots, e_n)$ sont en somme directe. Si la famille $\mathcal{E}$ est une base de $E$, alors les sous-espaces $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$, on dit alors que $\mathcal{E}$ est une base de $E$ **adaptée** à la décomposition $E = F \oplus G$, *on y reviendra*!

# III. Théorie de la dimension

## 1. Espaces vectoriels de dimension finie.

**Définition.** Un espace vectoriel est dit **de dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie.

***Exemples.*** Les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, possédant des bases finies, sont de dimension finie. Les espaces $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont de dimension infinie.

**Théorème de la base extraite.** Si $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors de toute famille génératrice de $E$, on peut extraire une base.

**Conséquence. Dans tout espace vectoriel de dimension finie, il existe des bases.**

**Théorème de la base incomplète.** Si $E$ est un espace vectoriel de dimension finie, toute famille libre de $E$ peut être complétée en une base.

Le programme de PCSI donne une version un peu plus précise de ce résultat:

**Théorème.** Si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ engendre $E$, et si $(x_i)_{i \in I}$ est libre pour une certaine partie $I$ de $[\![1, n]\!]$, alors il existe une partie $J$ de $[\![1, n]\!]$ contenant $I$ pour laquelle $(x_j)_{j \in J}$ est une base de $E$.

**Proposition.** Dans un espace engendré par $n$ vecteurs, toute famille de $n + 1$ vecteurs est liée.

**Bilan.** Dans un espace vectoriel $E$ de dimension finie, il existe des bases. Les bases de $E$ ont toutes le même cardinal, que l'on appelle **dimension** de $E$, et que l'on note $\dim(E)$.

***Exemples.*** Ainsi, $\dim(\mathbb{K}^n) = n$, $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$ et $\dim\big(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\big) = np$.

**Proposition.** Si $E$ est un espace vectoriel de dimension $n$, alors:
- toute famille libre est de cardinal au plus $n$, et toute famille libre de $n$ vecteurs est une base ;
- toute famille génératrice est de cardinal au moins $n$, et toute famille génératrice de $n$ vecteurs est une base.

***Exercice 3.*** Soient $a$, $b$, $c$ trois réels. Soient les fonctions $f : x \mapsto \sin(x+a)$, $g : x \mapsto \sin(x+b)$, $h : x \mapsto \sin(x+c)$. Montrer que la famille $(f, g, h)$ est liée dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

**2. Rang d'une famille finie de vecteurs**

**Définition.** Soit $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_p)$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel $E$ quelconque. Alors le sous-espace engendré $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{X})$ est de dimension finie, et sa dimension est appelée **rang** de la famille de vecteurs $\mathcal{X}$. Ainsi, $\mathrm{rg}(\mathcal{X}) = \dim\big(\mathrm{Vect}(\mathcal{X})\big)$.

**Proposition.** Soit $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_p)$ une famille de $p$ vecteurs de $E$, soit $r = \mathrm{rg}(\mathcal{X})$ son rang. On a alors $r \leq p$. De plus, la famille $\mathcal{X}$ est libre *si et seulement si* $r = p$.

**Remarque.** Le rang de la famille $\mathcal{X}$ est le "nombre de vecteurs linéairement indépendants", c'est-à-dire le cardinal maximal des familles libres extraites de $\mathcal{X}$. Autrement dit, si $\mathrm{rg}(\mathcal{X}) = r$, on peut extraire de $\mathcal{X}$ une famille libre de $r$ vecteurs, en revanche toute famille de $r+1$ vecteurs (ou plus) extraite de $\mathcal{X}$ sera liée.

**Proposition.** On ne modifie pas le rang d'une famille de vecteurs:

- si l'on permute les vecteurs ;
- si l'on multiplie l'un des vecteurs par un scalaire non nul ;
- si l'on ajoute à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres.

Vous aurez reconnu des manipulations qui correspondent aux **opérations élémentaires** sur les lignes ou colonnes d'une matrice, nous en reparlerons.

**3. Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie.**

**Proposition.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$. Si $F$ est un s.e.v. de $E$, alors $F$ est de dimension finie et $\dim(F) \leq n$ ; de plus, si $\dim(F) = n$, alors $F = E$.

**Remarque.** Ceci est fréquemment utilisé pour montrer l'égalité de deux espaces vectoriels : **si, entre deux espaces vectoriels $E$ et $F$ de dimension finie, on a une inclusion et l'égalité des dimensions, alors** $E = F$.

***Exercice 4.*** Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, pour tout $k$ entier naturel, soient les fonctions $f_k : x \mapsto \cos^k(x)$ et $g_k : x \mapsto \cos(kx)$. Pour tout $n$ entier naturel, montrer que les familles $(f_0, \cdots, f_n)$ et $(g_0, \cdots, g_n)$ sont libres, et qu'elles engendrent le même sous-espace vectoriel.

**Proposition.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$, soit $F$ un s.e.v. de $E$ de dimension $p$. Alors $F$ admet dans $E$ des supplémentaires, qui ont tous pour dimension commune $n-p$. Un s.e.v. $G$ est un supplémentaire de $F$ dans $E$ *si et seulement si* on a $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$ (**caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires**).

**Attention!** Un s.e.v. $F$ d'un espace vectoriel $E$ donné de dimension finie admet une infinité de supplémentaires, sauf dans les cas particuliers $F = \{0_E\}$ et $F = E$. Cela n'a donc pas de sens de dire "**le**" supplémentaire d'un e.v. $F$ puisqu'il n'y a pas unicité de ce supplémentaire.

**Conséquence.** Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces d'un e.v. $E$ de dimension finie. Alors $F$ et $G$ sont en somme directe (autrement dit $F \cap G = \{0_E\}$) *si et seulement si* on a $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$.

**Proposition (formule de Grassmann)**. Dans le cas général, si $F$ et $G$ sont deux s.e.v. d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie, on a la relation

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) .$$

# IV. Applications linéaires

## 1. Généralités.

**Définition.** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $u : E \to F$ est dite **linéaire** si elle vérifie

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall (x,y) \in E^2 \qquad u(\lambda x + \mu y) = \lambda\, u(x) + \mu\, u(y) .$$

Aurement dit, l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire (avec les mêmes coefficients) des images.

**Remarque.** On peut vérifier séparément l'**additivité**: $u(x+y) = u(x) + u(y)$ et la propriété $u(\lambda x) = \lambda\, u(x)$.

Lorsque $E = F$, une telle application est appelée un **endomorphisme** de $E$.

**Opérations.** Si $u$ et $v$ sont deux applications linéaires de $E$ vers $F$, si $\lambda \in \mathbb{K}$ est un scalaire, on peut définir les applications $\lambda\, u$ et $u + v$, qui sont encore des applications linéaires de $E$ vers $F$. On en déduit que l'ensemble, noté $\mathcal{L}(E,F)$, des applications linéaires de $E$ vers $F$, est lui-même muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

**Remarque.** Si $E$ et $F$ sont de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E,F)$ aussi et

$$\dim\big(\mathcal{L}(E,F)\big) = (\dim E) \times (\dim F) .$$

**Composition.** Si $E$, $F$, $G$ sont trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E,G)$. En clair, la composée de deux applications linéaires est une application linéaire. La composée de deux endomorphismes d'un espace vectoriel $E$ est encore un endomorphisme de $E$.

**Remarque.** Il est utile de connaître quelques règles de calcul concernant la composition des applications linéaires, notamment la propriété de **bilinéarité** (distributivité par rapport aux combinaisons linéaires): si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $u' \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$ et $v' \in \mathcal{L}(F,G)$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, alors

$$u \circ (\lambda\, v + \mu\, v') = \lambda\, u \circ v + \mu\, u \circ v' \qquad \text{et} \qquad (\lambda\, u + \mu\, u') \circ v = \lambda\, u \circ v + \mu\, u' \circ v .$$

L'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel $E$ est noté $\mathcal{L}(E)$ et, si $u \in \mathcal{L}(E)$, on définit $u^n$ pour tout entier naturel $n$ par l'initialisation $u^0 = \mathrm{id}_E$ et la récurrence $u^{n+1} = u \circ u^n$ pour tout $n$.

**Proposition.** Soit $u$ une application linéaire d'un espace vectoriel $E$ vers un espace vectoriel $F$. Alors:

- si $E'$ est un s.e.v. de $E$, son **image directe** $u(E')$ est un s.e.v. de $F$ ;

- si $F'$ est un s.e.v. de $F$, son **image réciproque** $u^{-1}(F')$ est un s.e.v. de $E$.

En particulier, l'ensemble $u(E) = \big\{u(x)\ ;\ x \in E\big\}$, noté $\mathrm{Im}(u)$, et appelé **image** de $u$, est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée $F$.

Et l'ensemble $u^{-1}\big(\{0_F\}\big) = \big\{x \in E \mid u(x) = 0_F\big\}$, noté $\mathrm{Ker}(u)$, et appelé **noyau** de $u$, est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ $E$.

**Proposition.** Une application linéaire de $E$ vers $F$ est injective *si et seulement si* on a $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$.

**Proposition.** Si $E$ est de dimension finie, si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille finie génératrice de $E$, si $u$ est une application linéaire de $E$ vers $F$, alors $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}\,\big(u(x_i)\big)_{i\in I}$.

**2. Isomorphismes.**

**Définition.** Une application linéaire bijective de $E$ vers $F$ est appelée **isomorphisme** de $E$ sur $F$. Lorsque $E = F$, on parle d'**automorphisme** de l'espace vectoriel $E$. En résumé, "auto"="endo"+"iso".

Si $u$ est un isomorphisme de $E$ sur $F$, alors la bijection réciproque $u^{-1}$ est linéaire, et est donc un isomorphisme de $F$ sur $E$.

La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme.

**Remarque.** Plus généralement, il est utile de savoir que la composée de deux applications (linéaires ou pas) injectives est encore injective, et que la composée de deux applications surjectives est encore surjective.

**Proposition et définition.** L'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel $E$, noté $\mathrm{GL}(E)$, est muni d'une structure de groupe pour la loi $\circ$ de composition des applications, on l'appelle le **groupe linéaire** de l'espace vectoriel $E$.

**Remarque.** On appelle **groupe** un ensemble $G$ muni d'une loi de composition interne $*$ associative, possédant un élément neutre $e$, et tel que tout élément admette un "symétrique" (ou "inverse"):

$$\forall x \in G\ \exists y \in G \quad x * y = y * x = e\ .$$

(on démontre que, si un tel inverse $y$ existe, alors il est unique et on pose $y = x^{-1}$). L'étude générale de cette structure algébrique ne figure pas à votre programme, mais nous en rencontrerons plusieurs exemples en algèbre linéaire.

**Notation.** Si $u \in \mathrm{GL}(E)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $u^{-k} = (u^{-1})^k = (u^k)^{-1}$.

**Définition.** Deux espaces vectoriels sont dits **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de l'un vers l'autre (cette relation est, bien sûr, symétrique).

**Proposition.** Deux e.v. de dimension finie sont isomorphes *si et seulement si* ils ont la même dimension. Bien sûr, un e.v. de dimension finie et un e.v. de dimension infinie ne sont jamais isomorphes.

**Application.** La construction d'un isomorphisme permet parfois de déterminer la dimension d'un espace vectoriel. Voir par exemple l'étude des suites définies par une relation de récurrence linéaire d'ordre deux, *cf.* poly sur les suites.

**Proposition.** Si deux e.v. $E$ et $F$ ont **la même** dimension **finie**, une application linéaire de $E$ vers $F$ est bijective (isomorphisme) *si et seulement si* elle est injective (noyau réduit à $\{0_E\}$), et aussi *si et seulement si* elle est surjective.

En particulier, un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ **de dimension finie** est un automorphisme *si et seulement si* il est ou bien injectif, ou bien surjectif.

***Exercice 5.*** Montrer que ceci n'est plus vrai si $E$ est de dimension infinie, par exemple avec $E = \mathbb{K}[X]$.

**Proposition.** Soit $E$ un espace vectoriel **de dimension finie**. Pour qu'un endomorphisme $u$ de $E$ soit inversible (i.e. pour que $u$ soit un automorphisme de $E$), il suffit que $u$ soit **inversible à gauche** (i.e. $\exists v \in \mathcal{L}(E) \quad v \circ u = \mathrm{id}_E$) ou bien **inversible à droite** (i.e. $\exists v \in \mathcal{L}(E) \quad u \circ v = \mathrm{id}_E$). Plus précisément, l'égalité $u \circ v = \mathrm{id}_E$, avec $E$ de dimension finie, $u$ et $v$ endomorphismes de $E$, entraîne $v \circ u = \mathrm{id}_E$.

**3. Détermination d'une application linéaire.**

**Proposition.** Soient $E$ et $F$ deux e.v. avec $E$ de dimension finie. Alors une application linéaire de $E$ dans $F$ est entièrement déterminée par l'image d'une base de $E$.

Précisons un peu cet énoncé: soit $n$ la dimension de $E$, soit alors $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de $E$, soit $\mathcal{F} = (f_1, \cdots, f_n)$ une famille de $n$ vecteurs de $F$. Alors il existe une unique application linéaire $u$ de $E$ dans $F$ telle que $u(e_i) = f_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. De plus, cette application linéaire $u$ est:

- injective *si et seulement si* la famille $\mathcal{F}$ est libre ;

- surjective *si et seulement si* la famille $\mathcal{F}$ est génératrice dans $F$ ;

- bijective (isomorphisme) *si et seulement si* la famille $\mathcal{F}$ est une base de $F$.

On peut reformuler la dernière assertion en disant qu'une application linéaire, en dimension finie, est un isomorphisme *si et seulement si* elle envoie une base sur une base.

**Proposition.** Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels, supposons $E = E_1 \oplus E_2$ avec $E_1$ et $E_2$ des s.e.v. de $E$. Alors une application linéaire de $E$ dans $F$ est entièrement déterminée par ses restrictions à $E_1$ et $E_2$.
Précisons là aussi: cela signifie que, si l'on se donne une application linéaire $u_1$ de $E_1$ dans $F$, et une application linéaire $u_2$ de $E_2$ dans $F$, alors il existe une unique application linéaire $u$ de $E$ dans $F$ telle que $u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$.

**4. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel.**

• Si $E$ est un e.v. et $\lambda$ un scalaire, l'application $x \mapsto \lambda x$ est un endomorphisme de $E$ (automorphisme si $\lambda \neq 0$), appelé **homothétie** de rapport $\lambda$, et noté $\lambda \mathrm{id}_E$. Les homothéties ont la particularité de commuter avec tous les endomorphismes de $E$ puisque, si $u \in \mathcal{L}(E)$, on a

$$u \circ (\lambda\, \mathrm{id_E}) = (\lambda\, \mathrm{id_E}) \circ u = \lambda\, u\ .$$

• Si $F$ et $G$ sont deux sous-espaces supplémentaires dans $E$ ($E = F \oplus G$), tout vecteur $x$ de $E$ se décompose de façon unique en $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. L'application $p : x \mapsto y$, considérée comme allant de $E$ dans $E$, est un endomorphisme de $E$ appelé

**projecteur** (ou **projection**) sur $F$ parallèlement à $G$. De même, l'application $q : x \mapsto z$, considérée comme allant de $E$ dans $E$, est un endomorphisme de $E$ appelé **projecteur** sur $G$ parallèlement à $F$. Ces endomorphismes vérifient les relations $p + q = \mathrm{id}_E$, $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$. L'endomorphisme $s = p - q = 2p - \mathrm{id}_E$ est la **symétrie** par rapport à $F$ et parallèlement à $G$, il vérifie la relation $s \circ s = \mathrm{id}_E$.

**Réciproque 1.** Un endomorphisme $p$ de $E$ est un projecteur *si et seulement* s'il vérifie la relation $p \circ p = p$ (endomorphisme "idempotent").

Pour être plus précis, si $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $p \circ p = p$, on démontre que les sous-espaces $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires dans $E$, et que $p$ est le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$.

***Exercice 6.*** Le démontrer!

**Réciproque 2.** Un endomorphisme $s$ de $E$ est une symétrie *si et seulement* s'il vérifie la relation $s \circ s = \mathrm{id}_E$ (automorphisme "involutif").

Pour être plus précis, si $s \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $s \circ s = \mathrm{id}_E$, on démontre que les sous-espaces $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans $E$, et que $s$ est la symétrie par rapport à $F$ et parallèlement à $G$.

***Exercice 7.*** Le démontrer!

***Exercice 8.*** Soient $p$ et $q$ deux projecteurs d'un espace vectoriel $E$. Montrer que $p$ et $q$ ont la même image si et seulement si $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $p$ et $q$ aient la même direction (c'est-à-dire le même noyau).

## 5. Rang d'une application linéaire.

**Définition.** Soit $u$ une application linéaire d'un e.v. $E$ vers un e.v. $F$. Si son image $\mathrm{Im}(u)$ est un s.e.v. de $F$ de dimension finie, on pose $\mathrm{rg}(u) = \dim\big(\mathrm{Im}(u)\big)$, c'est le **rang** de l'application linéaire $u$.

**Remarque.** Si $E$ admet pour base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, alors le rang de $u$ est aussi le rang de la famille de vecteurs $u(\mathcal{B}) = \big(u(e_1), \cdots, u(e_n)\big)$ dans $F$. En effet, on a alors

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\,\big(u(e_1), \cdots, u(e_n)\big)\ .$$

**Proposition.** Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ sont de rang fini, alors

$$\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \min\{\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)\}\ .$$

**Proposition.** Il y a invariance du rang d'une application linéaire par composition (à gauche ou à droite) par un isomorphisme. Autrement dit, si $V$, $E$, $F$, $W$ sont des espaces vectoriels de dimension finie, si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est une application linéaire, si $\varphi : V \to E$ et $\psi : F \to W$ sont des isomorphismes, alors

$$\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u \circ \varphi) = \mathrm{rg}(\psi \circ u) = \mathrm{rg}(\psi \circ u \circ \varphi)\ .$$

**Théorème du rang.** Si $E$ et $F$ sont des espaces vectoriels avec $E$ de dimension finie, si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $u$ est de rang fini et on a

$$\dim(E) = \dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) + \mathrm{rg}(u)\ .$$

**Forme géométrique du théorème du rang.** Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $E$ et $F$ espaces vectoriels quelconques, si $S$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$ dans $E$, alors $u$ induit un isomorphisme de $S$ sur $\mathrm{Im}\, u$.

***Exercice 9.*** Soit $u$ un endomorphisme d'un e.v. $E$ de dimension finie. Montrer que $\operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$ sont supplémentaires dans $E$ *si et seulement si* $\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u) = \{0_E\}$. Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ne vérifiant pas cette condition.

***Exercice 10.*** Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que $f$ "diminue les dimensions", i.e. si $V$ est un s.e.v. de $E$ de dimension finie, alors $\dim\big(f(V)\big) \leq \dim(V)$. Montrer qu'une application linéaire injective conserve les dimensions.

***Exercice 11.*** Soient $E$ et $F$ deux e.v. de dimension finie, soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, soit $W$ un s.e.v. de $F$. En considérant la restriction de $f$ au sous-espace $f^{-1}(W)$, montrer l'inégalité

$$\dim f^{-1}(W) \leq \dim(W) + \dim(\operatorname{Ker} f)\ .$$

***Exercice 12.*** Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie. Montrer les équivalences

$$\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u^2) \iff \operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u) = \{0_E\} \iff E = \operatorname{Im}(u) \oplus \operatorname{Ker}(u)\ .$$

# V. Équations linéaires

## 1. Sous-espaces affines d'un espace vectoriel (HP)

Pour permettre des applications à la géométrie, il est commode de pouvoir appeler "points" ou "vecteurs" les éléments d'un espace vectoriel, suivant l'interprétation que l'on veut en faire. *Une présentation plus rigoureuse consisterait à définir une structure abstraite d'***espace affine** *dont les éléments seraient appelés "points", et d'y associer un espace vectoriel dont les éléments seraient appelés "vecteurs", mais ceci nous entraînerait assez loin des programmes actuels.*

Dans ce contexte, si $A$ et $B$ sont deux "points" de $E$ et $\overrightarrow{u}$ un "vecteur", la relation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ de la géométrie classique s'écrira aussi $B = A + \overrightarrow{u}$. La "relation de Chasles" $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ peut se traduire par l'associativité $A + \big(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\big) = \big(A + \overrightarrow{u}\big) + \overrightarrow{v}$.

**Définition.** Si $u$ est un élément d'un espace vectoriel $E$, l'application $\tau_u : E \to E$ définie par $\tau_u(x) = x + u$ pour tout $x \in E$ est appelée **translation de vecteur** $u$. En utilisant les "notations points-vecteurs", on peut définir cette translation comme l'application qui, à tout "point" $A$ de $E$, associe le "point" $B = A + \overrightarrow{u}$, i.e. tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.

**Propriétés élémentaires.** L'application $\tau_u$ est bijective et $\big(\tau_u\big)^{-1} = \tau_{-u}$.

Si $u$ et $v$ sont deux vecteurs de $E$, alors $\tau_u \circ \tau_v = \tau_v \circ \tau_u = \tau_{u+v}$.

**Définition.** Une partie $\mathcal{A}$ d'un espace vectoriel $E$ est appelée **sous-espace affine** de $E$ s'il existe un sous-espace vectoriel $V$ de $E$ et un vecteur $a$ de $E$ tel que $\mathcal{A} = \tau_a(V)$. On a alors $\mathcal{A} = \big\{a + v\ ;\ v \in V\big\}$, on dit que $\mathcal{A}$ est le sous-espace affine de direction $V$ et passant par $a$, on note aussi $\mathcal{A} = a + V$.

**Remarque.** Si $\mathcal{A}$ est un sous-espace affine de $E$, sa **direction** $V$ est définie de façon unique par $V = \big\{\overrightarrow{AB}\ ;\ (A,B) \in \mathcal{A}^2\big\}$ ou $V = \big\{b - a\ ;\ (a,b) \in \mathcal{A}^2\big\}$ selon les notations choisies. On définit alors la **dimension** du sous-espace affine $\mathcal{A}$ comme étant la dimension de son sous-espace vectoriel directeur $V$.

Ainsi, une **droite affine** $\mathcal{D}$ est définie par la donnée d'un point $A$ et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ (non nul). Un point $M$ de $E$ appartient alors à cette droite $\mathcal{D}$ si et seulement si

$\overrightarrow{AM} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$. Ainsi, $\mathcal{D} = \left\{A + \lambda \overrightarrow{u} \ ; \ \lambda \in \mathbb{K}\right\}$, on note $\mathcal{D} = A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$. La **direction** de cette droite affine $\mathcal{D}$ est la droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}) = \mathbb{K}\overrightarrow{u}$.

De même, un **plan affine** $\mathcal{P}$ est défini par la donnée d'un point $A$ et de deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (non colinéaires). Un point $M$ de $E$ appartient alors à ce plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Ainsi, $\mathcal{P} = \left\{A + \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v} \ ; \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\right\}$, on note $\mathcal{P} = A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. La **direction** de ce plan affine $\mathcal{P}$ est le plan vectoriel $P = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

**Proposition.** Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux sous-espaces affines de $E$, de directions $V$ et $V'$. Alors leur intersection $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ est, soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine de direction $V \cap V'$.

**Définition.** Deux sous-espaces affines $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ de $E$, de directions respectives $V$ et $V'$, sont dits **parallèles** si on a $V \subset V'$ ou $V' \subset V$.

**Conséquence.** Deux sous-espaces affines $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ de même dimension (finie) sont parallèles si et seulement s'ils ont la même direction ($V = V'$), ils sont alors soit disjoints ($\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' = \emptyset$, ils sont alors dits **strictement parallèles**), soit confondus ($\mathcal{A} = \mathcal{A}'$).

### 2. Application aux équations linéaires.

On appelle **équation linéaire** toute équation **(E)** pouvant s'écrire sous la forme $u(x) = b$, où $u$ est une application linéaire (d'un e.v. $E$ vers un e.v. $F$), $b \in F$ étant donné, l'inconnue étant $x \in E$.

On introduit l'**équation homogène (E0)** associée à **(E)**, qui s'écrit $u(x) = 0_F$.

Notons $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_0$ les ensembles de solutions de **(E)** et **(E0)** respectivement.

Alors $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Ker}(u)$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $E$.

L'équation **(E)** est **compatible**, i.e. admet au moins une solution (autrement dit $\mathcal{S} \neq \emptyset$), si et seulement si $b \in \mathrm{Im}(u)$.

**Proposition.** L'ensemble $\mathcal{S}$ est, soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine de $E$ de direction $\mathcal{S}_0$. On peut formuler cela de la façon suivante:

*Si l'équation* **(E)** *admet au moins une solution "particulière" $x_P$, alors on obtient toutes les solutions de* **(E)** *en ajoutant cette solution particulière à la solution générale de l'équation homogène* **(E0)**.

Autrement dit, si $x_P \in \mathcal{S}$, alors $\mathcal{S} = x_P + \mathrm{Ker}(u) = x_P + \mathcal{S}_0 = \left\{x_P + x_H \ ; \ x_H \in \mathcal{S}_0\right\}$.

Ce principe général de résolution des équations linéaires est tout particulièrement utile dans le cadre des équations différentielles, mais pas seulement! On peut aussi l'utiliser pour retrouver l'expression d'une suite arithmético-géométrique.

## VI. Formes linéaires et hyperplans.

### 1. Les formes linéaires.

**Définition.** On appelle **forme linéaire** sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ toute application linéaire de $E$ vers $\mathbb{K}$.

L'ennemble des formes linéaires sur $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, noté $E^*$ et appelé **dual** de $E$ (*notation et vocabulaire hors programme*), on a tout simplement $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

**Conséquence.** Si $E$ est de dimension finie $n$, alors $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est aussi de dimension $n$.

**Exemple 1.** Si $S = [a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$, si $E = \mathcal{C}(S, \mathbb{K})$ est l'espace vectoriel des applications continues sur $S$, alors l'application $\mathcal{I} : E \to \mathbb{K}$, $f \mapsto \mathcal{I}(f) = \displaystyle\int_S f$ est une forme linéaire sur $E$. *C'est la propriété de linéarité de l'intégrale.*

**Exemple 2.** Soit $E = \mathbb{K}[X]$, soit $a \in \mathbb{K}$, l'application $\varphi_a : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$, $P \mapsto \varphi_a(P) = P(a)$ (valeur du polynôme $P$ au point $a$) est une forme linéaire sur $E$ (*évident*), dite "forme linéaire d'évaluation" au point $a$.

**Exemple 3 (fondamental).** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$, soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de $E$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit $e_i^* : E \to \mathbb{K}$ l'application qui, à tout vecteur $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, associe sa $i$-ème coordonnée $x_i$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors $e_i^*$ est une forme linéaire sur $E$ (*évident*), appelée **$i$-ème forme linéaire coordonnée relativement à la base $\mathcal{B}$**. On a ainsi, pour tout vecteur $x$ de $E$, la relation $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)\, e_i$. On peut noter aussi que $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker) pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

***Exercice 13.*** Avec les notations de l'exemple 3 ci-dessus, montrer que la famille $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \cdots, e_n^*)$ est une base de l'espace dual $E^*$. Cette base $\mathcal{B}^*$ est appelée **base duale** de la base $\mathcal{B}$ de $E$.

## 2. Les hyperplans.

**Définition.** Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$, on appelle **hyperplan** (vectoriel) tout sous-espace vectoriel $H$ de $E$ qui est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

**Exemple 1.** Dans $E = \mathbb{R}^n$, si $a_1, \cdots, a_n$ sont des réels non tous nuls, l'ensemble

$$H = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\}$$

est un hyperplan.

**Exemple 2.** Si $S = [a, b]$ est un segment, alors dans l'espace $E = \mathcal{C}(S, \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $S$, l'ensemble $H$ des fonctions dont l'intégrale sur $S$ est nulle est un hyperplan de $E$, puisque $H = \mathrm{Ker}(\mathcal{I})$, où $\mathcal{I}$ est la forme linéaire introduite dans l'exemple 1 du paragraphe précédent. Cette forme linéaire $\mathcal{I}$ n'est pas la forme nulle puisque la fonction constante $u : x \mapsto 1$ a une image non nulle: $\mathcal{I}(u) = b - a \neq 0$.

On peut caractériser différemment les hyperplans d'un espace vectoriel.

**Caractérisation. Un sous-espace vectoriel $H$ d'un espace vectoriel $E$ est un hyperplan si et seulement s'il admet pour supplémentaire une droite. Plus précisément, si $H$ est un hyperplan de $E$, et si $a$ est un vecteur de $E$ n'appartenant pas à $H$, alors $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$.**

*Preuve.* • *Si $H$ est un hyperplan de $E$ (on sait alors que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$, où $\varphi$ est une forme linéaire non nulle sur $E$) et si $a \in E \setminus H$, on prouve par analyse-synthèse que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$:*

*Analyse: Soit $x \in E$, supposons $x = h + \lambda a$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. En appliquant $\varphi$, on obtient $\varphi(x) = \varphi(h) + \lambda\, \varphi(a) = \lambda\, \varphi(a)$, et $\varphi(a)$ est un scalaire non nul puisque $a \notin H = \mathrm{Ker}(\varphi)$,* *on en déduit que* $\lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)}$*, puis que* $h = x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\, a$*. Le vecteur* $h$ *et le scalaire* $\lambda$ *étant uniquement déterminés, on en déduit l'unicité (sous réserve d'existence) de la décomposition de* $x$*.*

*Synthèse: Soit* $x \in E$*, posons* $h = x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\, a$*, alors* $\varphi(h) = \varphi(x) - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\, \varphi(a) = 0$*, donc* $h \in \mathrm{Ker}(\varphi) = H$*, et* $x$ *admet la décomposition* $x = h + \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\, a$*, ce qui prouve l'existence d'une décomposition de* $x$*.*

- *Réciproquement, si* $H$ *admet pour supplémentaire une droite* $D = \mathrm{Vect}(a)$ *avec* $a \in E \setminus \{0_E\}$*, alors tout vecteur* $x$ *de* $E$ *se décompose de façon unique en* $x = h + \lambda a$ *avec* $h \in H$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$*. On peut donc définir une application* $\varphi : E \to \mathbb{K}$ *qui, à tout vecteur* $x$ *de* $E$*, associe le scalaire* $\lambda$ *de cette écriture. On vérifie facilement sa linéarité,* $\varphi$ *est donc une forme linéaire sur* $E$*, elle est non nulle puisque* $\varphi(a) = 1 \neq 0$*. Enfin il est clair que* $x \in H \iff \varphi(x) = 0$*, autrement dit* $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$*, on a bien montré que* $H$ *est un hyperplan.*

Un sous-espace $H$ de $E$ est un hyperplan si et seulement si c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle $\varphi$, on peut alors se poser la question de savoir si le même hyperplan $H$ est aussi le noyau d'autres formes linéaires. Un premier élément de réponse est que, si $\psi$ est une forme linéaire proportionnelle à $\varphi$, c'est-à-dire de la forme $\psi = \lambda\varphi$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Ker}(\varphi) = H$. En fait, ce sont les seules solutions à ce problème, autrement dit on a le résultat suivant:

**Théorème. Deux formes linéaires non nulles sur $E$ ont le même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles.**

*Preuve. On vient de dire que deux formes linéaires (non nulles) proportionnelles ont le même noyau. Réciproquement, soient* $\varphi$ *et* $\psi$ *deux formes linéaires non nulles ayant pour noyau le même hyperplan* $H = \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$*. Soit* $a \in E \setminus H$*, on sait qu'alors* $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$*. Si* $x$ *est un vecteur de* $E$*, on le décompose en* $x = h + \lambda a$ *avec* $h \in H$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$*. On a alors* $\varphi(x) = \lambda\, \varphi(a)$ *et* $\psi(x) = \lambda\, \psi(a)$*, les scalaires* $\varphi(a)$ *et* $\psi(a)$ *étant non nuls puisque* $a \notin H$*. On a donc* $\psi(x) = \dfrac{\psi(a)}{\varphi(a)}\, \varphi(x)$*, et ceci pour tout* $x$*, donc la relation de proportionnalité (ou de colinéarité)* $\psi = \dfrac{\psi(a)}{\varphi(a)}\, \varphi$ *entre les formes linéaires* $\varphi$ *et* $\psi$*.*

## 3. Cas de la dimension finie.

Il est facile de caractériser les hyperplans en dimension finie, puisque

**Proposition. Dans un espace vectoriel $E$ de dimension $n$, les hyperplans sont les sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$.**

*Preuve. Si* $H$ *est un hyperplan dans* $E$*, comme il admet pour supplémentaire une droite, il est bien de dimension* $n-1$*. Inversement, si* $H$ *est un s.e.v. de* $E$ *de dimension* $n-1$*, soit* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n)$ *une base de* $E$ *adaptée à* $H$*, on a* $H = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{n-1})$ *et* $E = H \oplus \mathrm{Vect}(e_n)$*, donc* $H$ *est un hyperplan puisqu'il admet pour supplémentaire la droite* $\mathrm{Vect}(e_n)$*.*

Si l'espace $E$ de dimension $n$ est rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, et si $H$ est un hyperplan de $E$, alors il existe une forme linéaire non nulle $\varphi$ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Mais une forme linéaire sur $E$ est représentée dans la base $\mathcal{B}$ par une matrice-ligne $L = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, autrement dit $\varphi$ est l'application qui, à tout vecteur $x$ de $E$ se décomposant sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ dans la base $\mathcal{B}$, associe le scalaire $\varphi(x) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$. On a donc

$$H = \mathrm{Ker}(\varphi) = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \right\} .$$

L'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ est appelée **équation (cartésienne) de l'hyperplan $H$ dans la base $\mathcal{B}$**.

Deux équations différentes peuvent-elles représenter le même hyperplan ? La réponse est donnée par le théorème énoncé dans le paragraphe précédent: deux formes linéaires non nulles ont le même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles. On en déduit que **deux équations linéaires définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles**. Soient donc $(a_1, \cdots, a_n)$ et $(a'_1, \cdots, a'_n)$ deux $n$-uplets de scalaires non tous nuls, soient $H$ et $H'$ les hyperplans d'équations $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{n} a'_i x_i = 0$ respectivement dans la base $\mathcal{B}$. On a alors

$$H = H' \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad \forall i \in [\![1, n]\!] \quad a'_i = \lambda a_i \ .$$

## 4. <u>Application aux systèmes linéaires homogènes.</u>

Soit un système linéaire homogène de $n$ équations à $p$ inconnues:

$$(\mathbf{S}) : \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p &= 0 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,p}x_p &= 0 \\ \quad \cdots \qquad \cdots & \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p &= 0 \end{cases} .$$

Ce système s'écrit matriciellement $AX = 0$ où $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice des coefficients, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^p$ est le "vecteur" inconnu.

**On supposera dans toute la suite que** $\forall i \in [\![1, n]\!]\ \exists j \in [\![1, p]\!] \quad a_{i,j} \neq 0$**, c'est-à-dire que chaque ligne de la matrice $A$ comporte au moins un coefficient non nul, soit encore qu'il n'y a pas d'équation "bidon"** $0x_1 + \cdots + 0x_p = 0$ **dans le système (S)**.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la $i$-ème équation $(E_i)$: $a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,p}x_p = 0$ est alors l'équation d'un hyperplan $H_i$ de $\mathbb{K}^p$ puisqu'elle s'écrit sous la forme $\varphi_i(x) = 0$, en notant $x = (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ le vecteur inconnu et $\varphi_i$ la forme linéaire non nulle sur $\mathbb{K}^p$ définie par $\varphi_i(x_1, \cdots, x_p) = a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,p}x_p$.

Ainsi, si on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions du système **(S)**, alors $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ qui est décrit comme une intersection de $n$ hyperplans puisque $\mathcal{S} = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$.

Une autre interprétation du même système **(S)** est obtenue en introduisant l'application linéaire $\Phi : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ canoniquement associée à la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a alors

$$\forall\, x = (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{K}^p \qquad \Phi(x) = \big(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)\big) \in \mathbb{K}^n \ .$$

L'ensemble des solutions du système **(S)** est alors le noyau de $\Phi$, soit $\mathcal{S} = \mathrm{Ker}(\Phi)$, ce qui montre que $\mathcal{S}$ est un s.e.v. de $\mathbb{K}^p$ et en donne la dimension par le théorème du rang:

$$\dim(\mathcal{S}) = \dim\big(\,\mathrm{Ker}(\Phi)\big) = p - \mathrm{rg}(\Phi) = p - \mathrm{rg}(A)\ .$$

L'entier $p$ est le nombre d'inconnues du système, il reste à interpréter le rang de la matrice $A$. On peut considérer ce rang comme le rang de la famille des vecteurs-lignes $\begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,p} \end{pmatrix}$ de la matrice $A$ et, comme chaque ligne correspond à une équation, on peut interpréter le rang de $A$ comme étant le nombre d'équations indépendantes dans le système **(S)**.

**Remarque pour les plus vaillants.** En formalisant un peu plus, on peut voir que la transposée de $A$ est la matrice de la famille de formes linéaires $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ dans la base $\mathcal{B}^*$ de $(\mathbb{K}^p)^*$ duale de la base canonique de $\mathbb{K}^p$ (*notion hors programme, mais introduite dans l'exercice* **13.** *ci-dessus*). Donc $r = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top) = \mathrm{rg}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$.

On retiendra de tout cela la “formule” qui donne la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{S}$ des solutions d'un système linéaire homogène:

$$\boxed{\dim(\mathcal{S}) = p - r = (\text{nombre d'inconnues}) \ - \ (\text{nombre d'équations indépendantes})}\ .$$

***Exercice 14 (fondamental).*** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$.

**a.** Soient $H_1$, $\cdots$, $H_k$ des hyperplans de $E$. Montrer que

$$\dim\Big(\bigcap_{i=1}^{k} H_i\Big) \geq n - k\ .$$

**b.** Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension $p$. Montrer qu'il est possible d'écrire $F$ comme intersection de $n-p$ hyperplans. Peut-on écrire $F$ comme une intersection de $k$ hyperplans, où $k$ est un entier strictement inférieur à $n-p$ ?

**Conséquence.** Si $E_2$ est un plan ($\dim E_2 = 2$), toute droite $D$ de $E_2$ est alors un hyperplan de $E_2$ et, si $E_2$ est rapporté à une base, cette droite peut être décrite par une équation linéaire de la forme $ax + by = 0$, avec $a$ et $b$ deux scalaires non tous deux nuls (les lettres $x$ et $y$ étant les coordonnées d'un vecteur générique de $E_2$ dans la base choisie).

Si $E_3$ est un espace vectoriel de dimension 3, tout plan $P$ de $E_3$ est alors un hyperplan de $E_3$ et, si $E_3$ est rapporté à une base, ce plan peut être décrit par une équation linéaire de la forme $ax + by + cz = 0$, avec $a$, $b$, $c$ trois scalaires non tous nuls (les lettres $x$, $y$, $z$ étant les coordonnées d'un vecteur générique de $E_3$ dans la base choisie).

En revanche, **dans un espace vectoriel $E_3$ de dimension 3, une droite ne pourra jamais être définie par une seule équation linéaire.** Mais on pourra toujours la définir comme intersection de deux plans, c'est-à-dire à l'aide d'un système de deux équations linéaires (à trois inconnues $x$, $y$, $z$).