# CORRIGÉ du D.S. de MATHÉMATIQUES numéro 1
# PSI2 2023-2024

## EXERCICE *d'après e3a 2023, filière PC*

**1.a.** La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ étant décroissante sur $[k, k+1]$, on a, pour $t \in [k, k+1]$, l'encadrement $\dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{k}$. En intégrant ces inégalités sur le segment $[k, k+1]$, on obtient

$$\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k} = \frac{1}{k} \; .$$

**b.** En sommant ces inégalités pour $k$ de 1 à $n$ et en utilisant la relation de Chasles sur les intégrales, on trouve

$$H_{n+1} - 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n \; .$$

En réordonnant un peu (décalage d'indice dans l'inégalité de gauche notamment), on obtient

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n) \; .$$

**2.a.** On reconnaît dans la série $\sum u_k$ une série télescopique associée à la suite $(a_k)$, cette série converge donc si et seulement si la suite $(a_k)$ converge, et c'est clairement le cas avec $\lim\limits_{k \to +\infty} a_k = 0$. Exprimons une somme partielle: si $K$ est un entier naturel non nul, on a, en exploitant le télescopage,

$$\sum_{k=1}^{K} u_k = \sum_{k=1}^{K} (a_{k-1} - a_k) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k - \sum_{k=1}^{K} a_k = a_0 - a_K \quad \underset{K \to +\infty}{\longrightarrow} \quad a_0 = 1 \; ,$$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1$.

**b.** Comme $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{1}{2^k} = 0$, un petit développement limité donne, lorsque $k \to +\infty$,

$$a_k = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-1} = 1 - \left(1 - \frac{n-1}{2^k} + o\Big(\frac{1}{2^k}\Big)\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{n-1}{2^k} \; .$$

Par comparaison à une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, on déduit donc la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k \geq 0} a_k$.

**c.** Exprimons une somme partielle: soit $K \geq 1$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{K} k u_k &= \sum_{k=1}^{K} k\,(a_{k-1} - a_k) = \sum_{k=1}^{K} k a_{k-1} - \sum_{k=1}^{K} k a_k \\
&= \sum_{k=0}^{K-1} (k+1) a_k - \sum_{k=0}^{K} k a_k = \sum_{k=0}^{K-1} a_k - K\, a_K \quad \underset{K \to +\infty}{\longrightarrow} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = S_n \; ,
\end{aligned}$$

puisqu'il résulte immédiatement du développement limité de **2.b.** que $\lim\limits_{K \to +\infty} K a_K = 0$. On en déduit la convergence de la série $\sum k u_k$ et l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k u_k = S_n$.

**3.a.** Sans dériver, la fonction $t \mapsto 2^t = e^{t \ln(2)}$ est croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, donc son inverse $t \mapsto 2^{-t} = \dfrac{1}{2^t}$ est décroissante sur cet intervalle. Ensuite, $t \mapsto 1 - 2^{-t}$ est croissante positive, ainsi que $t \mapsto (1 - 2^{-t})^{n-1}$, enfin $g_n$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

**b.** Comme en **1.a.**, de la décroissance de $g_n$ sur $[k, k+1]$ pour $k \in [\![0, m-1]\!]$, on déduit l'encadrement

$$\forall k \in [\![0, m-1]\!] \qquad a_{k+1} = g_n(k+1) \leq \int_k^{k+1} g_n(t)\,\mathrm{d}t \leq g_n(k) = a_k \ .$$

En sommant ces inégalités pour $k$ de 0 à $m-1$, on obtient

$$\textbf{(*)} \qquad \sum_{k=1}^{m} a_k \leq \int_0^m g_n(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{m-1} a_k \ .$$

**c.** Posons $u = 1 - 2^{-t} = 1 - e^{-t\ln(2)}$. *La fonction* $t \mapsto 1 - 2^{-t}$ *est en effet de classe* $\mathcal{C}^1$*, strictement croissante et bijective de* $[0, \alpha]$ *vers* $\left[0, 1-2^{-\alpha}\right]$*, ce qui autorise à l'utiliser comme changement de variable dans l'intégrale.* Ainsi, $t = -\dfrac{\ln(1-u)}{\ln(2)}$, puis $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{(1-u)\,\ln(2)}$.

Le changement de variable proposé conduit bien à l'égalité

$$\int_0^\alpha g_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln(2)} \int_0^{1-2^{-\alpha}} \frac{1-u^{n-1}}{1-u}\,\mathrm{d}u \ .$$

**d.** L'encadrement **(*)** du **b.** devient alors, pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \leq \frac{1}{\ln(2)} \int_0^{1-2^{-m}} \frac{1-u^{n-1}}{1-u}\,\mathrm{d}u \leq \sum_{k=0}^{m-1} a_k \ ,$$

soit encore

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \leq \frac{1}{\ln(2)} \int_0^{1-2^{-m}} (1 + u + u^2 + \cdots + u^{n-2})\,\mathrm{d}u \leq \sum_{k=0}^{m-1} a_k \ ,$$

La fonction polynomiale $u \mapsto 1 + u + u^2 + \cdots + u^{n-2}$ étant continue sur $[0,1]$, ses primitives sont aussi continues sur cet intervalle, et on a

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to+\infty} \int_0^{1-2^{-m}} (1 + u + u^2 + \cdots + u^{n-2})\,\mathrm{d}u &= \int_0^1 (1 + u + u^2 + \cdots + u^{n-2})\,\mathrm{d}u \\
&= \left[ u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \cdots + \frac{u^{n-1}}{n-1} \right]_0^1 = H_{n-1} \ .
\end{aligned}$$

En faisant tendre $m$ vers l'infini, on obtient donc l'encadrement

$$S_n - 1 \leq \frac{H_{n-1}}{\ln(2)} \leq S_n \ .$$

**e.** Donc $\dfrac{H_{n-1}}{\ln(2)} \leq S_n \leq 1 + \dfrac{H_{n-1}}{\ln(2)}$. L'encadrement obtenu en **1.b.** montre que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

On déduit donc, de nouveau par encadrement, que

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{\ln(2)} = \log_2(n) \ .$$

## PROBLÈME

**PARTIE A.**

**A.1.** On intègre sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ une fonction continue, positive et non partout nulle, son intégrale $W_n$ est donc strictement positive (**théorème de stricte positivité**). On écrit

$$W_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t\,(1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t = W_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{2n} t\ \sin t)\ \sin t\,\mathrm{d}t\ .$$

Une intégration par parties donne alors

$$W_{n+1} = W_n + \left[\frac{\sin t\ \cos^{2n+1} t}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{W_{n+1}}{2n+1}\ ,$$

ce qui conduit à la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (2n+2)\,W_{n+1} = (2n+1)\,W_n\ ,$$

ce qu'il fallait prouver.

**A.2.** On a $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$, puis $W_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2}\,W_n$, d'où

$$W_n = \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}\,W_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\ \frac{\pi}{2}$$

(*multiplier numérateur et dénominateur par* $2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n) = 2^n\,n!$).

**NB.** La réponse étant donnée, on peut aussi se contenter de vérifier par récurrence.

**A.3.** Comme en **A.1.**, en intégrant par parties, on trouve $(2n+3)\,W'_{n+1} = (2n+2)\,W'_n$ puis, avec $W'_0 = 1$ et comme en **A.2.**, on en déduit

$$W'_n = \frac{2\times 4\times\cdots\times(2n)}{3\times 5\times\cdots\times(2n+1)} = \frac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n+1)!}\ .$$

**A.4.** Pour $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leq \cos t \leq 1$, d'où $\cos^{2n+2} t \leq \cos^{2n+1} t \leq \cos^{2n} t$. En intégrant ces inégalités sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on obtient $W_{n+1} \leq W'_n \leq W_n$. On a donc $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leq \dfrac{W'_n}{W_n} \leq 1$ pour tout $n$. D'autre part, $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Le théorème d'encadrement donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W'_n}{W_n} = 1$, c'est-à-dire $W'_n \sim W_n$.

**A.5.** L'équivalence $W'_n \sim W_n$ s'écrit $\dfrac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n+1)!} \sim \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\ \dfrac{\pi}{2}$, ce qui peut encore s'écrire

$$\pi \sim 2\times\frac{2^{4n}\,(n!)^4}{(2n)!\,(2n+1)!} = 2\times\frac{2^{4n}\,(n!)^4}{\big((2n)!\big)^2\,(2n+1)} \sim \frac{2^{4n}\,(n!)^4}{n\,\big((2n)!\big)^2}\ ,$$

c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{4n}\,(n!)^4}{n\,\big((2n)!\big)^2} = \pi$.

**A.6.** On calcule :

$$\begin{aligned} b_n - b_{n-1} &= \ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = \ln\left(\frac{n!}{(n-1)!} \times e \times \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} \times \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \ln\left[e \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right] = 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) . \end{aligned}$$

Puis on développe et, après quelques simplifications :

$$b_n - b_{n-1} = 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\right) = O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) ,$$

donc la série de terme général $b_n - b_{n-1}$ est (absolument) convergente. La suite $(b_n)$ est donc convergente, c'est-à-dire admet une limite réelle $B$, puis $a_n = e^{b_n}$ converge vers $A = e^B$, qui est un réel strictement positif.

**A.7.** On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{n}} = A$, ce qui s'écrit encore $n! \sim A\sqrt{n}\Big(\dfrac{n}{e}\Big)^n$. En reportant dans la formule de Wallis, on trouve $\dfrac{2^{4n}\,(n!)^4}{n\,\big((2n)!\big)^2} \sim \dfrac{2^{4n}\,A^4\,n^2\,\left(\frac{n}{e}\right)^{4n}}{n\,A^2\,(2n)\,\left(\frac{2n}{e}\right)^{4n}} = \dfrac{A^2}{2}$, et cette expression doit tendre vers $\pi$ lorsque $n$ tend vers l'infini, donc $\dfrac{A^2}{2} = \pi$ et, $A$ étant positif, $A = \sqrt{2\pi}$ : on obtient la **formule de Stirling** (**cette formule fait désormais partie de votre cours, mais doit être utilisée avec modération, c'est-à-dire uniquement en dernier recours**) :

$$n! \sim \sqrt{2\pi\, n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

**A.8.** La relation $u_n \sim v_n$ s'écrit aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$. Si on se donne $\varepsilon > 0$, il existe alors un rang $N$ à partir duquel $\left|\dfrac{v_n}{u_n} - 1\right| \leq \varepsilon$, ce qui s'écrit encore $(1-\varepsilon)u_n \leq v_n \leq (1+\varepsilon)u_n$. Pour $n \geq N$, par sommation de ces inégalités pour $k$ allant de $n+1$ à l'infini (les séries sont supposées convergentes), on a alors $(1-\varepsilon)R_n \leq R'_n \leq (1+\varepsilon)R_n$. On a donc prouvé l'existence d'un rang $N$ à partir duquel $\left|\dfrac{R'_n}{R_n} - 1\right| \leq \varepsilon$, et ceci quel que soit $\varepsilon > 0$, ce qui montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{R'_n}{R_n} = 1$, soit $R'_n \sim R_n$.

**A.9.** Pour tout $k \geq 2$, on a, par décroissance de l'application $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, l'encadrement

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} .$$

On somme pour $k$ allant de $n+1$ à un certain entier naturel $N$ (avec $N > n$):

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} = \int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^N \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{N} .$$

Enfin, on fait tendre $N$ vers l'infini, cela donne $\dfrac{1}{n+1} \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$. Comme les termes extrêmes sont équivalents entre eux, le théorème d'encadrement permet de conclure que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

**A.10.** Si l'on reprend le développement fait en **A.6.** avec un terme de plus, on obtient

$$b_n - b_{n-1} = 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

ce qui s'écrit aussi $b_{n-1} - b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$. La question **A.8.** s'applique alors et montre que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (b_{k-1} - b_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{12k^2}$. En posant $B = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n$, et en utilisant **A.9.** et la transitivité de la relation d'équivalence, on a donc $b_n - B \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n}$, ce qui s'écrit aussi $b_n = B + \dfrac{1}{12n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. En prenant l'exponentielle,

$$a_n = e^{b_n} = e^B \cdot \exp\left(\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Enfin,

$$n! = \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n a_n = \sqrt{2\,\pi\,n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

ce qui est le résultat attendu avec $C = \dfrac{1}{12}$.

**PARTIE B.**

**B.1.** Une première intégration par parties, avec $u'(t) = 1$ et $v(t) = \cos^{2n} t$, donne

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t\,\mathrm{d}t = \Big[t\,\cos^{2n} t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,\sin t\,\cos^{2n-1} t\,\mathrm{d}t = 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,\sin t\,\cos^{2n-1} t\,\mathrm{d}t\,.$$

Une deuxième intégration par parties, avec $u'(t) = t$ et $v(t) = \sin t\,\cos^{2n-1} t$, donne

$$\begin{aligned} W_n &= 2n\left[\frac{t^2}{2}\,\sin t\,\cos^{2n-1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - n\,J_n + 2n\left(n - \frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\,\sin^2 t\,\cos^{2n-2} t\,\mathrm{d}t \\ &= -n\,J_n + (2n^2 - n)\,(J_{n-1} - J_n)\,. \end{aligned}$$

Finalement, la relation obtenue peut s'écrire $\quad W_n = -2n^2\,J_n + n(2n-1)\,J_{n-1}$.

**B.2.** Divisons par $W_n$ la relation obtenue ci-dessus :

$$1 = -2n^2\,\frac{J_n}{W_n} + n(2n-1)\,\frac{J_{n-1}}{W_{n-1}}\,\frac{W_{n-1}}{W_n} = -2n^2\,\frac{J_n}{W_n} + 2n^2\,\frac{J_{n-1}}{W_{n-1}}$$

(en tenant compte de la relation $\dfrac{W_{n-1}}{W_n} = \dfrac{2n}{2n-1}$, *cf.* question **A.1.**). Finalement,

$$\frac{1}{n^2} = 2\Big(\frac{J_{n-1}}{W_{n-1}} - \frac{J_n}{W_n}\Big) .$$

**B.3.a.** Sur l'intervalle $I = \Big[0, \dfrac{\pi}{2}\Big]$, la fonction sinus est concave puisque sa dérivée seconde $-\sin$ est négative. Le graphe de la fonction sinus est alors, sur ce segment, situé au-dessus de sa sécante, ce qui se traduit par l'inégalité $\sin(t) \geq \dfrac{2}{\pi}t$, équivalente à l'inégalité demandée.

**b.** On élève au carré l'inégalité précédente (les deux membres sont positifs), donc $t^2 \leq \dfrac{\pi^2}{4}\ \sin^2 t$ pour tout $t \in \Big[0, \dfrac{\pi}{2}\Big]$. On en déduit

$$0 \leq J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\ \cos^{2n} t\ \mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi^2}{4}\ \sin^2 t\ \cos^{2n} t\ \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\ \cos^{2n} t\ \mathrm{d}t\ ,$$

soit $0 \leq J_n \leq \dfrac{\pi^2}{4}\,(W_n - W_{n+1})$. En remplaçant ensuite $W_{n+1}$ par $\dfrac{2n+1}{2n+2}\,W_n$ (*cf.* question **A.1.**), on obtient $0 \leq J_n \leq \dfrac{\pi^2}{4}\ W_n\ \Big(1 - \dfrac{2n+1}{2n+2}\Big) = \dfrac{\pi^2}{8(n+1)}\ W_n$. Il est alors clair que $J_n = o(W_n)$, soit encore que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{J_n}{W_n} = 0$.

**B.4.** D'après **B.2.**, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 2\ \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{J_{k-1}}{W_{k-1}} - \frac{J_k}{W_k}\Big) = 2\ \Big(\frac{J_0}{W_0} - \frac{J_n}{W_n}\Big)$$

(somme télescopique). Comme $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $J_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\ \mathrm{d}t = \frac{\pi^3}{24}$, il reste $S_n = \dfrac{\pi^2}{6} - 2\ \dfrac{J_n}{W_n}$.

**B.5.** Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{J_n}{W_n} = 0$, la suite $(S_n)$ des sommes partielles de la série est convergente, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (*de toute façon, c'est du cours*), et

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}\ .$$

**B.6.** On peut observer que

$$S - T = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{(2p)^2} = \frac{1}{2}\ \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{2}S$$

(en effet, les termes pour $k$ impair sont nuls, ce qui permet cette réindexation en posant $k = 2p$). Donc $T = \dfrac{S}{2} = \dfrac{\pi^2}{12}$.

**PARTIE C.**

**C.1.** La linéarité de l'opérateur $\Delta$ est évidente : si $f$ et $g$ sont deux fonctions de $E$, $\lambda$ et $\mu$ deux réels, on a bien $\Delta(\lambda f+\mu g)=\lambda\,\Delta f+\mu\,\Delta g$. Enfin, si $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie $\lim\limits_{+\infty} f=0$, il est immédiat que la fonction $\Delta f$ est aussi continue sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie $\lim\limits_{+\infty}\Delta f=0$, donc $\Delta$ va bien de $E$ vers $E$ : c'est un endomorphisme de l'espace vectoriel $E$, $\Delta\in\mathcal{L}(E)$.

**C.2.** Calculons une somme partielle $s_n$ de cette série, on observe un télescopage :

$$s_n=\sum_{p=1}^{n}(\Delta f)(p)=\sum_{p=1}^{n}\big(f(p+1)-f(p)\big)=f(n+1)-f(1)\ .$$

Comme $f\in E$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1)=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n=-f(1)$ : la série $\sum\limits_{p\geq 1}(\Delta f)(p)$ converge, et sa somme est $s=\sum\limits_{p=1}^{+\infty}(\Delta f)(p)=-f(1)$. On obtient ensuite le reste d'ordre $n$ : $r_n=s-s_n=-f(1)-\big(f(n+1)-f(1)\big)=-f(n+1)$.

**C.3.** Pour tout $x>0$ et $k\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}(\Delta f_{k-1})(x)&=f_{k-1}(x+1)-f_{k-1}(x)\\&=\frac{1}{(x+1)\cdots(x+k-1)(x+k)}-\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+k-1)}\\&=\frac{x-(x+k)}{x(x+1)\cdots(x+k-1)(x+k)}=-k\,f_k(x)\ .\end{aligned}$$

Donc $\Delta f_{k-1}=-k\,f_k$.

**C.4.** La convergence de la série $\sum\limits_{p\geq 1} f_k(p)$ peut se déduire de l'équivalent, facile à obtenir, $f_k(p)=\dfrac{1}{p(p+1)\cdots(p+k)}\underset{p\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{p^{k+1}}$ (comparaison à une série de Riemann convergente). Mais utilisons plutôt les questions **C.2.** et **C.3.** ci-dessus : puisque $f_k=-\dfrac{1}{k}\,\Delta f_{k-1}$, la convergence de la série $\sum\limits_{p\geq 1} f_k(p)$ en découle et

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p)=-\frac{1}{k}\sum_{p=n+1}^{+\infty}(\Delta f_{k-1})(p)=\frac{1}{k}\,f_{k-1}(n+1)=\frac{1}{k}\,\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\ .$$

**C.5.** Fixons $p\in\mathbb{N}^*$ et montrons la relation par récurrence sur $q$ :

- pour $q=1$, le lecteur vérifiera que

$$\frac{1}{p^2}-0!\,f_1(p)=\frac{1}{p}\,f_1(p)=\frac{1}{p^2(p+1)}\ .$$

- Soit $q\in\mathbb{N}^*$, supposons l'égalité vraie au rang $q$, alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{p^2}-\sum_{k=1}^{q+1}(k-1)!\,f_k(p) &= \frac{q!}{p}\,f_q(p)-q!\,f_{q+1}(p) \;=\; \frac{q!}{p}\Big[f_q(p)-p\,f_{q+1}(p)\Big]\\ &= \frac{q!}{p}\left(\frac{1}{p(p+1)\cdots(p+q)}-\frac{1}{(p+1)\cdots(p+q+1)}\right)\\ &= \frac{q!}{p}\,\frac{q+1}{p(p+1)\cdots(p+q+1)}=\frac{(q+1)!}{p}\,f_{q+1}(p)\ ,\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

**C.6.** En sommant, pour $p$ de $n+1$ à $+\infty$, les égalités obtenues ci-dessus (ce qui a un sens puisque l'on est assuré de la convergence des séries de termes généraux $\dfrac{1}{p^2}$ et $f_k(p)$), on obtient

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}-\sum_{k=1}^{q}(k-1)!\left(\sum_{p=n+1}^{+\infty}f_k(p)\right)=\sum_{p=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{p^2}-\sum_{k=1}^{q}(k-1)!\,f_k(p)\right)=q!\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{f_q(p)}{p}\geq 0\ .$$

Il ne reste plus qu'à majorer :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{f_q(p)}{p}\leq\frac{1}{n+1}\sum_{p=n+1}^{+\infty}f_q(p)=\frac{1}{q\,(n+1)^2\,(n+2)\cdots(n+q)}$$

et, en multipliant par $q!$, on trouve la majoration demandée.

**C.7.** On prend

$$S'_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2}+\sum_{k=1}^{2}\frac{(k-1)!}{k(n+1)\cdots(n+k)}=S_n+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)(n+2)}=S_n+\frac{2n+5}{2(n+1)(n+2)}$$

et on a la majoration de l'erreur $0\leq\dfrac{\pi^2}{6}-S'_n\leq\dfrac{1}{(n+1)^2(n+2)}$. On donc bien “accéléré la convergence” puisque $S-S'_n=O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, résultat à comparer avec celui obtenu en **A.9.** qui donne $S-S_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$.