CORRIGÉ du DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 1
PSI2 2023-2024

PROBLÈME 1

Partie A. Étude de produits infinis

A.1. On a $a_n = \dfrac{n+1}{n}$ donc P_n est un produit "télescopique" :

$$P_n = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n} = n+1 \,.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = +\infty$ et le produit infini est divergent.

A.2. Si le produit infini $\prod\limits_{n\geq 0} a_n$ converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = P \in \mathbb{R}^*$ donc $a_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{P}{P} = 1$.

L'exemple de la question **A.1.** montre que la condition n'est pas suffisante.

A.3. • Calculons dans la joie et la bonne humeur : posons $a_k = 1 + \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ et $b_k = 1 - \dfrac{1}{k^2}$;

$$\begin{aligned} P_{2n} &= \left[(1+1)\left(1-\frac{1}{2}\right)\right] \times \left[\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\right] \times \cdots \times \left[\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right] \\ &= \left[\frac{2}{1}\times\frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\right] \times \cdots \times \left[\frac{2n}{2n-1}\times\frac{2n-1}{2n}\right] \quad = \quad 1 \,. \end{aligned}$$

On peut formaliser un peu plus ce calcul :

$$P_{2n} = \prod_{k=1}^{n} \left[\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)\left(1-\frac{1}{2k}\right)\right] = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k}{2k-1} \times \frac{2k-1}{2k}\right) = \prod_{k=1}^{n} 1 = 1 \,.$$

Par ailleurs, $P_{2n+1} = a_{2n+1}\, P_{2n} = \dfrac{2n+2}{2n+1}$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} P_{2n+1} = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 1$: le produit infini $\prod\limits_{k\geq 1} a_k$ converge et $P = \prod\limits_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\right) = 1$.

Rappelons en effet qu'une suite (u_n) telle que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite l converge elle aussi vers l.

• On recommence...

$$Q_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{\left(\prod\limits_{k=2}^{n}(k-1)\right)\left(\prod\limits_{k=2}^{n}(k+1)\right)}{\left(\prod\limits_{k=2}^{n} k\right)^2} \,.$$

Donc $$Q_n = \frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n-1} k\right)}{\left(\prod\limits_{k=2}^{n} k\right)} \times \frac{\left(\prod\limits_{k=3}^{n+1} k\right)}{\left(\prod\limits_{k=2}^{n} k\right)} = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Le produit infini $\prod\limits_{k\geq 2} b_k$ est donc convergent, et $Q = \prod\limits_{k=2}^{+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

A.4.a. Notons d'abord que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = 0$, on utilise le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en zéro :

$$\ln(a_n) = \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) ,$$

autrement dit $\ln(a_n) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - r_n$, avec $r_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

b. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ converge (critère spécial des séries alternées, puisque la suite de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ décroît et tend vers 0) et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} r_n$ diverge puisque $r_n \sim \dfrac{1}{2n}$ (comparaison de séries à termes positifs, les r_n étant nécessairement positifs à partir d'un certain rang). Donc la série $\displaystyle\sum_n \ln(a_n)$ diverge.

c. Considérons un produit partiel

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \ln a_k\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n} r_k\right).$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ est un réel (puisque cette série est convergente) tandis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} r_k\right) = +\infty$ (sommes partielles d'une série divergente dont les termes sont positifs à partir d'un certain rang). Il en résulte que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(P_n) = -\infty$, puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n = 0$; le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 1} a_n$ est divergent.

A.5.a. Considérons deux cas :

- si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$: alors $\ln(1+u_n) \sim u_n$, donc les séries $\displaystyle\sum_n u_n$ et $\displaystyle\sum_n \ln(1+u_n)$ sont de même nature (*comparaison de séries à termes positifs*) ;
- si la suite (u_n) ne tend pas vers 0 : alors la suite $\big(\ln(1+u_n)\big)$ ne tend pas non plus vers 0, et les séries considérées sont toutes deux (grossièrement) divergentes.

b. • Si la série $\displaystyle\sum_n u_n$ converge, alors la série $\displaystyle\sum_n \ln(1+u_n)$ converge d'après la question précédente, notons $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+u_n)$ sa somme. Alors

$$P_n := \prod_{k=0}^{n} (1+u_k) = \exp\left(\sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^S \in \mathbb{R}_+^*,$$

donc le produit infini $\displaystyle\prod_n (1+u_n)$ est convergent.

• En revanche, si la série $\displaystyle\sum_n u_n$ diverge, il en est de même de la série $\displaystyle\sum_n \ln(1+u_n)$; les sommes partielles S_n de cette dernière tendent alors vers $+\infty$ (*série divergente à termes positifs*), donc $P_n = e^{S_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et le produit infini $\displaystyle\prod_n (1+u_n)$ est divergent.

A.6.a. • La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (*critère spécial des séries alternées*), et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n}$ diverge, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ est divergente.

• Développons $\ln(1+u_n)$:

$$\ln(1+u_n) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big)\ ,$$

donc la série de terme général $\ln(1+u_n)$ converge (*somme de deux séries convergentes*). Si on note S sa somme, alors les produits partiels $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)$ tendent vers le réel strictement positif e^S, donc le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 1}(1+u_n)$ est convergent. *Cela montre que le résultat du* **A.5.b.** *n'est plus valable si l'on supprime l'hypothèse* $u_n \geq 0$.

b. Il suffit de reprendre l'exemple de la question **A.4.** en posant $v_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

PARTIE B. Une équation fonctionnelle

B.1.a. Pour tout réel a tel que $\sin a \neq 0$ (donc si a non multiple de π), on a $\cos a = \dfrac{\sin 2a}{2\,\sin a}$.

• si $x = 0$, on a évidemment $P_n(0) = 1$ pour tout n ;

• si $x \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$, alors $\dfrac{x}{2^k}$ n'est jamais multiple de π ($k \in \mathbb{N}^*$), ce qui justifie le calcul suivant :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{2\,\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}\right) = \frac{\sin x}{2^n\,\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

après télescopage.

b. • Pour $x = 0$, on a $P(0) = 1$;

• si $x \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$, alors en utilisant l'équivalent $\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{2^n}$, on obtient $P(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \frac{\sin x}{x}$ (*non nul*), donc le produit infini est convergent.

Dans la suite, on notera sinc (sinus cardinal) *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $\operatorname{sinc}(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ *si* $x \neq 0$ *et* $\operatorname{sinc}(0) = 1$ *; cette fonction est continue sur* $\mathbb{R}$.

B.2.a. Par récurrence sur n :

initialisation pour $n = 1$, on a bien $f(x) = f\Big(\dfrac{x}{2}\Big)\cos\Big(\dfrac{x}{2}\Big) = f\Big(\dfrac{x}{2}\Big)P_1(x)$ puis, si pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on a $f(x) = f\Big(\dfrac{x}{2^n}\Big)P_n(x)$, alors

$$f(x) = f\Big(\frac{x}{2^{n+1}}\Big)\cos\Big(\frac{x}{2^{n+1}}\Big)P_n(x) = f\Big(\frac{x}{2^{n+1}}\Big)P_{n+1}(x)\ ,$$

ce qui achève la récurrence. La fonction f étant continue en 0, on a $\lim_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = f(0)$.
En passant à la limite ($n \to +\infty$) dans le membre de droite de l'égalité $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) P_n(x)$, vraie pour tout n, on obtient $f(x) = f(0)\,\mathrm{sinc}(x) = a\,\mathrm{sinc}(x)$ pour tout $x \in]-\pi, \pi[$.

b. Montrons par récurrence sur p la proposition :

$$\forall x \in]-2^p\pi, 2^p\pi[\qquad f(x) = f(0)\,\mathrm{sinc}(x)\ .$$

La proposition est vraie pour $p = 0$ (c'est la question **B.2.a.** ci-dessus) et, si elle est vraie pour $p \in \mathbb{N}$ donné, soit $x \in]-2^{p+1}\pi, 2^{p+1}\pi[$ supposé non nul, alors $\dfrac{x}{2} \in]-2^p\pi, 2^p\pi[\setminus\{0\}$ donc (*hypothèse de récurrence*) $f\left(\dfrac{x}{2}\right) = f(0)\,\mathrm{sinc}\left(\dfrac{x}{2}\right) = f(0)\,\dfrac{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\dfrac{x}{2}}$, puis

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)\,\cos\left(\frac{x}{2}\right) = f(0)\,\frac{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\,\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\dfrac{x}{2}} = f(0)\,\frac{\sin x}{x} = f(0)\,\mathrm{sinc}(x)\ ,$$

ce qui achève la récurrence (la vérification pour $x = 0$ étant triviale).

c. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue en 0, est solution de l'équation fonctionnelle **(E)**, on a alors $f(x) = f(0)\,\mathrm{sinc}(x)$ pour tout x réel. Réciproquement, toute fonction de la forme $x \mapsto a\,\mathrm{sinc}(x)$ (avec a réel fixé) est continue en 0 et est solution de **(E)**. On a donc obtenu ainsi toutes les fonctions continues en 0 et solutions de **(E)**.

PROBLÈME 2

PARTIE A. Irrationalité du nombre e.

1.a. On sait que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k!} = e$, et la suite (u_n) est strictement croissante.

b. On a aussi $\lim_{n\to+\infty} v_n = e$, mais la suite (v_n) est décroissante puisque

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} - \frac{1}{n\cdot n!} = -\frac{1}{n(n+1)\,(n+1)!} \leq 0\ .$$

c. Conséquence immédiate de **a.** et **b.**

2.a. La double inégalité ci-dessus est vraie en particulier au rang q: $u_{q+1} \leq e \leq u_q + \dfrac{1}{q\cdot q!}$, et en encadrant encore (strictement) :

$$u_q < u_{q+1} \leq e \leq u_q + \frac{1}{q\cdot q!} < u_q + \frac{1}{q!}\ .$$

b. Multiplions tout par $q!$, on obtient $q!\,u_q < q!\,e < q!u_q + 1$ (inégalités strictes). Mais $q!e = q!\,\dfrac{p}{q} = (q-1)!\,p$ est un entier, et $q!u_q = \sum_{k=0}^{q} \dfrac{q!}{k!} = \sum_{k=0}^{q}(k+1)(k+2)\cdots(q-1)q$ est aussi un entier. L'entier naturel $q!e$ serait donc compris strictement entre deux entiers consécutifs, ce qui est bien sûr une absurdité. On en déduit que le nombre e est irrationnel : $e \notin \mathbb{Q}$.

PARTIE B. Irrationalité du nombre π.

3.a. Comme on suppose que $\pi = \dfrac{a}{b}$, on a $P_n(x) = \dfrac{b^n}{n!}\, x^n\, (\pi - x)^n$. Il est alors immédiat que $P_n(\pi - x) = P_n(x)$.

b. On calcule

$$\begin{aligned} P_n' &= \frac{1}{n!}\Big(nX^{n-1}(a-bX)^n - nbX^n(a-bX)^{n-1}\Big) \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\, X^{n-1}\,(a-bX)^{n-1}\,(a-2bX) \\ &= (a-2bX)\, P_{n-1}\;. \end{aligned}$$

c. Pour $n \geq 2$, on observe que $P_n' = (a-2bX)\, P_{n-1}$ s'annule en 0 et en $\pi = \dfrac{a}{b}$, et aussi au milieu de l'intervalle en $\dfrac{a}{2b} = \dfrac{\pi}{2}$, la dérivée étant positive sur $\Big[0, \dfrac{\pi}{2}\Big]$, négative sur $\Big[\dfrac{\pi}{2}, \pi\Big]$. Comme P_n s'annule aussi en 0 et en π, la fonction polynomiale P_n est positive sur $[0,\pi]$, et (*le lecteur est invité à dresser un tableau de variations*)

$$M_n = \max_{x\in[0,\pi]} \big|P_n(x)\big| = \max_{x\in[0,\pi]} P_n(x) = P_n\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = P_n\Big(\frac{a}{2b}\Big) = \frac{1}{n!}\,\Big(\frac{a^2}{4b}\Big)^n\;.$$

Ce résultat est valable aussi pour $n = 0$ et $n = 1$, ce qui a peu d'importance pour la suite.

d. La fonction $x \mapsto P_n(x)\,\sin(x)$ est continue, positive et non identiquement nulle sur le segment $[0,\pi]$, donc son intégrale sur ce segment est strictement positive (**théorème de stricte positivité**).

e. De la question **c.**, on déduit

$$0 \leq I_n = \int_0^{\pi} P_n(x)\,\sin(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\pi} P_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \pi \max_{x\in[0,\pi]} P_n(x) = \pi\,\frac{1}{n!}\,\Big(\frac{a^2}{4b}\Big)^n\;.$$

Le majorant tend vers 0 (c'est le terme général d'une série exponentielle). Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

4.a. Par la formule de Taylor polynomiale, on a $Q = \displaystyle\sum_{p=0}^{d} \frac{Q^{(p)}(0)}{p!}\, X^p$. Par identification des coefficients (unicité de l'écriture d'un polynôme), on a $c_p = \dfrac{Q^{(p)}(0)}{p!}$ pour tout $p \in [\![0,d]\!]$, la relation étant encore vraie pour $p > d$ puisqu'alors les deux termes sont nuls. Donc

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad Q^{(p)}(0) = p!\, c_p\;.$$

b. Traitons d'abord les cas extrêmes:

- le polynôme P_n est multiple de X^n, ses coefficients c_k avec $0 \leq k \leq n-1$ sont donc nuls, on en déduit que $P_n^{(k)}(0) = 0$ pour $0 \leq k \leq n-1$;

- le polynôme P_n est de degré $2n$, donc $P_n^{(k)}$ est le polynôme nul pour $k > 2n$, ainsi $P_n^{(k)}(0) = 0$ pour $k \geq 2n+1$.

Pour les cas intermédiaires, développons l'expression de P_n par la formule du binôme de Newton:

$$P_n = \frac{X^n}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j b^j a^{n-j} X^j = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{n!} \binom{n}{k-n} (-1)^{k-n} b^{k-n} a^{2n-k} X^k .$$

Ainsi, en utilisant **a.**, pour $n \leq k \leq 2n$, on a

$$P_n^{(k)}(0) = \binom{n}{k-n} \frac{k!}{n!} (-1)^{k-n} b^{k-n} a^{2n-k}$$

et c'est bien un entier relatif car a et b sont entiers (et les exposants $k-n$ et $2n-k$ sont positifs), le coefficient binomial $\binom{n}{k-n}$ est un entier, et le rapport $\frac{k!}{n!}$ est entier vu que $k \geq n$.

c. En dérivant k fois la relation obtenue en **3.a.**, on a $(-1)^k\, P_n^{(k)}(\pi - x) = P_n^{(k)}(x)$. En particulier, $P_n^{(k)}(\pi) = (-1)^k\, P_n^{(k)}(0)$, c'est donc un entier relatif d'après **b.**

d. On a $Q^{(d)} = d!c_d$ (polynôme constant).

5.a. Une première intégration par parties donne

$$I_n = \big[- P_n(x)\, \cos(x) \big]_0^\pi + \int_0^\pi P_n'(x)\, \cos(x)\, \mathrm{d}x = P_n(\pi) + P_n(0) + \int_0^\pi P_n'(x)\, \cos(x)\, \mathrm{d}x .$$

Après $2n$ intégrations par parties, on obtient

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k \Big(P_n^{(2k)}(0) + P_n^{(2k)}(\pi) \Big) + \varepsilon' \int_0^\pi P_n^{(2n)}(x)\, \sin(x)\, \mathrm{d}x ,$$

où les ε_k $(0 \leq k \leq n-1)$ et ε' valent 1 ou -1. Les $P_n^{(2k)}(0)$ et $P_n^{(2k)}(\pi)$ sont des entiers relatifs. La dernière intégrale est aussi un entier relatif puisque $P_n^{(2n)} = \frac{(-b)^n\,(2n)!}{n!}$ (polynôme constant) d'après **4.d.**, donc $\int_0^\pi P_n^{(2n)}(x)\, \sin(x)\, \mathrm{d}x = 2 \times \frac{(-b)^n\,(2n)!}{n!} \in \mathbf{Z}$. Finalement, I_n est un entier relatif.

b. La suite (I_n) prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ puisque les I_n sont des entiers relatifs, strictement positifs d'après **3.d.**, on a donc $I_n \geq 1$ pour tout n, ce qui contredit $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$ (question **3.e.**). L'hypothèse que π est rationnel est donc fausse.

PARTIE C. Étude des E-développements

6.a. La suite (a_n) étant croissante, on a $a_n \geq a_0$ pour tout n, donc $0 < \frac{1}{a_0 \cdots a_n} \leq \frac{1}{a_0^{n+1}}$ et, par comparaison avec une série géométrique, on déduit la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{a_0 \cdots a_n}$, ainsi que la majoration de sa somme:

$$0 < x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \cdots a_n} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_0^{n+1}} = \frac{1}{a_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a_0} \right)^n = \frac{1}{a_0 - 1} .$$

Remarque. Le vrai nom des "E-développements" est: **développement en série de Engel**.

b. Le nombre a_0 est un entier et l'inégalité $x \leq \dfrac{1}{a_0 - 1}$ obtenue ci-dessus s'écrit aussi $a_0 - 1 \leq \dfrac{1}{x}$. Par ailleurs, la somme d'une série à termes strictement positifs convergente est strictement supérieure à son premier terme, donc $x > \dfrac{1}{a_0}$, soit $a_0 > \dfrac{1}{x}$. L'encadrement $a_0 - 1 \leq \dfrac{1}{x} < a_0$ avec $a_0 - 1$ entier prouve que $a_0 - 1 = \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$, soit $a_0 = 1 + \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.

7.a. On a $x_0 = x > 0$, ce qui garantit l'existence de a_0 (et de x_0 évidemment!) et, si on suppose que x_n existe et $x_n > 0$ pour un n donné, alors a_n est bien défini et, en utilisant $\lfloor t \rfloor > t - 1$,

$$x_{n+1} = \left(1 + \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor\right) x_n - 1 > \frac{1}{x_n}\, x_n - 1 = 0 \;,$$

ce qu'il fallait prouver.

b. On a $x_{n+1} = \left(1 + \left\lfloor \dfrac{1}{x_n} \right\rfloor\right) x_n - 1 \leq \left(1 + \dfrac{1}{x_n}\right) x_n - 1 = x_n$, donc la suite (x_n) est décroissante. Comme $0 < x \leq 1$, on a $\dfrac{1}{x} \geq 1$, donc $\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \geq 1$ et $a_0 \geq 2$. Enfin, la fonction partie entière étant croissante, de $x_{n+1} \leq x_n$ (nombres strictement positifs), on déduit $\dfrac{1}{x_{n+1}} \geq \dfrac{1}{x_n}$, puis $\left\lfloor \dfrac{1}{x_{n+1}} \right\rfloor \geq \left\lfloor \dfrac{1}{x_n} \right\rfloor$, et $a_{n+1} \geq a_n$, la suite (a_n) est donc croissante. Notons qu'il est clair que les a_n sont des entiers naturels.

c. Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0 \cdots a_k}$. On veut montrer que $S_n + \dfrac{x_{n+1}}{a_0 \cdots a_n} = x$ pour tout n.

- c'est vrai pour $n = 0$ puisque

$$S_0 + \frac{x_1}{a_0} = \frac{1}{a_0} + \frac{a_0 x_0 - 1}{a_0} = x_0 = x \;.$$

- si c'est vrai pour un entier n donné, alors

$$\begin{aligned} S_{n+1} + \frac{x_{n+2}}{a_0 \cdots a_n a_{n+1}} &= S_n + \frac{1}{a_0 \cdots a_n a_{n+1}} + \frac{a_{n+1} x_{n+1} - 1}{a_0 \cdots a_n a_{n+1}} \\ &= S_n + \frac{x_{n+1}}{a_0 \cdots a_n} = x \;, \end{aligned}$$

cela reste donc vrai au rang $n + 1$. L'égalité est prouvée par récurrence.

La suite (x_n) est positive décroissante d'après **b.**, donc $0 \leq x_{n+1} \leq x \leq 1$, et la suite (a_n) est croissante donc $a_k \geq a_0 \geq 2$, puis $0 \leq \dfrac{x_{n+1}}{a_0 \cdots a_n} \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{a_0 \cdots a_n} = 0$ par encadrement, puis $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n = x$, ce qui signifie que $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \cdots a_n} = [a_0, \cdots, a_n, \cdots]$.

Tout réel x de $]0, 1]$ admet donc au moins un développement en série de Engel.

8.a. On a en effet

$$\begin{aligned}
[a_{n_0},\cdots,a_n,\cdots] &= \sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{1}{a_{n_0}\cdots a_k} \\
&= a_0\cdots a_{n_0-1}\sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{1}{a_0\cdots a_k} \\
&= a_0\cdots a_{n_0-1}\left([a_0,\cdots,a_n,\cdots] - \sum_{k=0}^{n_0-1}\frac{1}{a_0\cdots a_k}\right) \\
&= b_0\cdots b_{n_0-1}\left([b_0,\cdots,b_n,\cdots] - \sum_{k=0}^{n_0-1}\frac{1}{b_0\cdots b_k}\right) \\
&= \cdots\cdots\cdots = [b_{n_0},\cdots,b_n,\cdots]
\end{aligned}$$

(*on achève en faisant le même travail "à l'envers" avec les b à la place des a*).

b. En posant $y = [a_{n_0},\cdots,a_n,\cdots] = [b_{n_0},\cdots,b_n,\cdots]$, la question **6.b.** montre que $a_{n_0} = b_{n_0} = 1 + \left\lfloor \frac{1}{y} \right\rfloor$, ce qui est une contradiction puisque les entiers a_{n_0} et b_{n_0} ne sont pas censés être égaux. On en déduit, avec **7.c.**, que tout réel de $]0,1]$ admet **un et un seul** développement en série de Engel.

9.a. Supposons $a_n = c$ pour $n \geq n_0$. Alors

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_0a_1} + \cdots + \frac{1}{a_0\cdots a_{n-2}} + \frac{1}{a_0\cdots a_{n-1}}\left(1 + \frac{1}{c} + \frac{1}{c^2} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_0a_1} + \cdots + \frac{1}{a_0\cdots a_{n-2}} + \frac{1}{a_0\cdots a_{n-1}}\,\frac{c}{c-1}\,,
\end{aligned}$$

et on constate que $x = [a_0,\cdots,a_n,\cdots]$ est un rationnel, par exemple parce que c'est une somme (finie) de nombres rationnels.

b. Soit $x = \dfrac{u}{v}$ un rationnel appartenant à $]0,1]$, on a donc u et v entiers tels que $0 < u \leq v$. Son (unique) développement en série de Engel est $x = [a_0,\cdots,a_n,\cdots]$, où l'on calcule les a_n par l'algorithme décrit à la question **7.** en introduisant une suite auxiliaire (x_n). En posant $u_0 = u = vx_0$, on a déjà un entier naturel u_0 tel que $x_0 = \dfrac{u_0}{v}$. Posons alors $u_n = vx_n$ pour tout n, la suite (u_n) est décroissante car on sait que (x_n) est décroissante d'après **7.b.**, les u_n sont positifs car v et x_n le sont. Il ne reste plus qu'à montrer que les u_n sont entiers: c'est vrai pour $n = 0$ et, si c'est vrai au rang n, alors

$$u_{n+1} = vx_{n+1} = v(a_nx_n - 1) = a_n(vx_n) - v = a_n\,u_n - v$$

est un entier relatif comme différence et produit d'entiers relatifs. Donc (u_n) est bien une suite décroissante d'entiers naturels telle que $x_n = \dfrac{u_n}{v}$ pour tout n. Mais une suite décroissante d'entiers naturels est nécessairement stationnaire, il en résulte que la suite (x_n) est aussi stationnaire, puis aussi la suite (a_n) puisque $a_n = 1 + \left\lfloor \dfrac{1}{x_n} \right\rfloor$.

Bilan. Un nombre x de $]0,1]$ est rationnel **si et seulement si** la suite (a_n) de son développement en série de Engel $x = [a_0, \cdots, a_n, \cdots]$ est stationnaire.

10.a. $x = [c, c, \cdots, c, \cdots] = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{c^{k+1}} = \frac{1}{c-1}$.

b. Avec $a_n = n+2$, on a

$$x = [2, 3, 4, \cdots] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+2)!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e - 2\ .$$

c. Avec $a_n = (2n+1)(2n+2)$, on a $a_0 \cdots a_n = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (2n+1) \times (2n+2) = (2n+2)!$, donc

$$x = [2, 12, 30, 56, \cdots] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+2)!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} = \mathrm{ch}(1) - 1\ .$$

11. Le nombre $e-2$ appartient à $]0,1]$, et son développement en série de Engel est associé à la suite (a_n) telle que $a_n = n+2$ d'après **10.b.** Cette suite (a_n) n'étant pas stationnaire, le nombre $e-2$ n'est pas rationnel, et donc le nombre e non plus.

12. Partons de $\mathrm{ch}(\sqrt{2}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2})^{2n}}{(2n)!}$. On a alors $\mathrm{ch}(\sqrt{2}) - 2 = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+2}}{(2n+4)!}$. On cherche alors une suite (a_n) telle que, pour tout n, $\dfrac{1}{a_0 \cdots a_n} = \dfrac{2^{n+2}}{(2n+4)!}$. Cela équivaut à poser $a_0 = 6$ puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{(2n+4)!}{2^{n+2}} \dfrac{2^{n+1}}{(2n+2)!} = (n+2)(2n+3)$, donc finalement $a_n = (n+2)(2n+3)$ pour tout n entier naturel. Comme il s'agit bien d'une suite croissante d'entiers naturels telle que $a_0 \geq 2$, on peut affirmer que $\mathrm{ch}(\sqrt{2}) - 2 = [a_0, \cdots, a_n, \cdots]$.

La suite (a_n) n'étant pas stationnaire, le nombre $\mathrm{ch}(\sqrt{2}) - 2$ n'est pas rationnel, donc le nombre $\mathrm{ch}(\sqrt{2})$ non plus. Donc $e^{\sqrt{2}}$ n'est pas rationnel non plus (car, s'il l'était, le nombre $\mathrm{ch}(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{2}\left(e^{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{e^{\sqrt{2}}}\right)$ serait rationnel aussi).