Structure d'espace vectoriel. Familles libres.

1. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille libre de vecteurs dans un espace vectoriel E, soit a un vecteur de E n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$. Montrer que la famille $(e_1 + a, \cdots, e_p + a)$ est libre.

- -

Supposons $\lambda_1(e_1 + a) + \cdots + \lambda_p(e_p + a) = 0_E$ avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ scalaires. On a alors $(*) : (\lambda_1 + \cdots + \lambda_p)a = -(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p)$.

Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \neq 0$, on déduit $a = -\dfrac{1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_p}(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p) \in \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$, ce qui est exclu.

On a donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 0$, puis $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0_E$ d'après $(*)$, ce qui entraîne que tous les λ_i sont nuls puisque la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est libre. On a ainsi prouvé que la famille $(e_1 + a, \cdots, e_p + a)$ est libre aussi.

---

2. Soient $a_1, \cdots, a_n$ des réels distincts, soit pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ la fonction $f_i : x \mapsto |x - a_i|$. Montrer que la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- -

Notons d'abord que chaque fonction f_i est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$, sauf au point a_i.

Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des réels, supposons $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$. S'il existait un indice $j \in [\![1, n]\!]$ pour lequel λ_j est non nul, alors la fonction $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ (qui est par hypothèse la fonction nulle) ne serait pas dérivable au point a_j, ce qui constitue une absurdité. Les coefficients λ_i sont donc tous nuls, ce qui prouve la liberté de la famille.

3*. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel E, soit $F = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$, soit G un supplémentaire de F dans E. Pour tout vecteur a de G, on pose $F_a = \mathrm{Vect}(e_1 + a, \cdots, e_p + a)$.

a. Montrer que G est un supplémentaire de F_a dans E.

b. Montrer que $F_a = F_b$ si et seulement si $a = b$.

- -

a. Soit $x \in E$. Comme $E = F + G$, il existe un vecteur z de G et des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p + z$. On peut alors écrire

$$x = \big(\lambda_1(e_1 + a) + \cdots + \lambda_p(e_p + a)\big) + \big(z - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_p)a\big)\ ,$$

ce qui montre que $x \in F_a + G$. Ainsi, $E = F_a + G$.

Soit $x \in F_a \cap G$, alors x peut se mettre sous la forme $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i(e_i + a)$ et $x \in G$. Posons $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$, alors $y \in F$, et $y \in G$ car $y = x - \Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\Big)a$. Donc $y = 0_E$ puisque F et G sont en somme directe. La famille $(e_1, \cdots, e_p)$ étant libre, on en déduit que les λ_i sont tous nuls, puis que $x = 0_E$. Ainsi, $F_a \cap G = \{0_E\}$.

En conclusion, $E = F_a \oplus G$.

b. Supposons $F_a = F_b$. Alors le vecteur $e_1 + a$, qui appartient clairement à F_a, appartient aussi à F_b, donc il existe des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ tels que $e_1 + a = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(e_i + b)$. Cette relation entraîne

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i - e_1 = \Big(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\Big)\, b - a \in F \cap G$$

(le premier membre est dans F, le second est dans G, et les deux sont égaux). Donc ce vecteur est nul, i.e.

$$(\lambda_1 - 1)e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p = 0_E \ .$$

La famille $(e_1, \cdots, e_p)$ étant libre, on en déduit que $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$, donc $e_1 + a = e_1 + b$, puis $a = b$.

La réciproque est triviale!

Espaces vectoriels de dimension finie.

4. Soient F, G, H trois sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension n.

a. On suppose que $\dim(F) + \dim(G) > n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

b. On suppose que $\dim(F) + \dim(G) + \dim(H) > 2n$. Montrer que $F \cap G \cap H \neq \{0\}$.

- -

a. La formule de Grassmann donne

$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G) > n - \dim(F+G) \ .$$

Or, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E, donc $\dim(F+G) \leq n$, on obtient donc $\dim(F \cap G) > 0$, soit $F \cap G \neq \{0_E\}$.

b. On applique deux fois la formule de Grassmann:

$$\begin{aligned}
\dim(F \cap G \cap H) &= \dim\big((F \cap G) \cap H\big) \\
&= \dim(F \cap G) + \dim(H) - \dim\big((F \cap G) + H\big) \\
&= \dim(F) + \dim(G) + \dim(H) - \dim(F+G) - \dim\big((F \cap G) + H\big) \\
&> 2n - \Big(\dim(F+G) + \dim\big((F \cap G) + H\big)\Big) \ .
\end{aligned}$$

Or, $F + G$ et $(F \cap G) + H$ étant deux sous-espaces vectoriels de E, la somme de leurs dimensions ne peut excéder $2n$, on déduit donc $\dim(F \cap G \cap H) > 0$.

Applications linéaires.

5. Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E. On suppose que p et q commutent ($p \circ q = q \circ p$). Montrer que $f = p \circ q$ et $g = p + q - p \circ q$ sont des projecteurs de E, déterminer leur image et leur noyau en fonction des images et noyaux de p et q. *On pourra éventuellement noter que* $\mathrm{id}_E - g = (\mathrm{id}_E - p) \circ (\mathrm{id}_E - q)$.

- -

• Il est immédiat que $f\circ f = f$, donc f est un projecteur. De $f = p\circ q$, on tire $\operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} f$. Comme on a aussi $f = q \circ p$, alors $\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} f$. Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker} f$ contient les deux sous-espaces $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Ker} q$, donc il contient leur somme : $\operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} f$. Inversement, si $x \in \operatorname{Ker} f$, on écrit $x = q(x) + \big(x - q(x)\big)$, avec $q(x) \in \operatorname{Ker} p$ et $x - q(x) \in \operatorname{Ker} q$ (*vérifications immédiates, laissées au lecteur*). Donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$.
De même, de $f = p \circ q$, on tire $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} p$, et de $f = q \circ p$, on tire $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} q$. Donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$. Inversement, si $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$, alors $x = p(x) = q(x)$ (*tout vecteur appartenant à l'image d'un projecteur est invariant par ce projecteur*), donc $x = p\big(q(x)\big) = f(x) \in \operatorname{Im} f$. Finalement, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.

• Notons $p' = \mathrm{id}_E - p$ et $q' = \mathrm{id}_E - q$: ce sont les projecteurs respectivement "associés" aux projecteurs p et q (*cf.* cours), autrement dit ce sont des projecteurs tels que $\operatorname{Im} p' = \operatorname{Ker} p$, $\operatorname{Ker} p' = \operatorname{Im} p$, et de même $\operatorname{Im} q' = \operatorname{Ker} q$ et $\operatorname{Ker} q' = \operatorname{Im} q$. De plus, p' et q' commutent (*évident*). Donc, en appliquant ce qui précède, $g' = p' \circ q' = q' \circ p'$ est un projecteur tel que

$$\operatorname{Ker} g' = \operatorname{Ker} p' + \operatorname{Ker} q' = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} g' = \operatorname{Im} p' \cap \operatorname{Im} q' = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q\ .$$

Comme $g = \mathrm{id}_E - g'$, donc g est le projecteur associé à g', c'est donc le projecteur tel que

$$\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} g' = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} g' = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q\ .$$

---

6. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E vérifiant la relation $u^2 - 3u + 2\,\mathrm{id}_E = 0$. Démontrer la relation

$$E = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u - 2\,\mathrm{id}_E)\ .$$

- -

Première méthode : par analyse-synthèse

• **Analyse :** Soit $x \in E$, supposons **(*)** : $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $z \in \operatorname{Ker}(u - 2\,\mathrm{id}_E)$; on a alors $u(y) = y$ et $u(z) = 2z$, donc **(**)** : $u(x) = u(y) + u(z) = y + 2z$. Des relations **(*)** et **(**)**, on tire que $y = 2x - u(x)$ et $z = u(x) - x$. Ce sont des conditions **nécessaires** portant sur y et z : si une décomposition du vecteur x existe, ce **ne** peut être **que** celle-ci, on a donc prouvé l'**unicité**.

• **Synthèse :** c'est une vérification consistant à prouver que les vecteurs x et y obtenus ci-dessus répondent bien à toutes les conditions imposées. Soit donc $x \in E$, posons $y = 2x - u(x)$ et $z = u(x) - x$. On vérifie immédiatement que $y + z = x$. Par ailleurs,

$$(u - \mathrm{id}_E)(y) = -(u - \mathrm{id}_E)\big(u(x) - 2x\big) = -\big((u - \mathrm{id}_E) \circ (u - 2\,\mathrm{id}_E)\big)(x) = -(u^2 - 3u + 2\,\mathrm{id}_E)(x) = 0$$

d'après l'hypothèse de l'énoncé, donc $y \in \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$. De même,

$$(u - 2\,\mathrm{id}_E)(z) = (u - 2\,\mathrm{id}_E)\big(u(x) - x\big) = \big((u - 2\,\mathrm{id}_E) \circ (u - \mathrm{id}_E)\big)(x) = (u^2 - 3u + 2\,\mathrm{id}_E)(x) = 0$$

donc $z \in \operatorname{Ker}(u - 2\,\mathrm{id}_E)$. Cette "synthèse" montre que les conditions données sur y et z sont **suffisantes** et prouve l'**existence** de la décomposition.

Moralité : $E = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u - 2\,\mathrm{id}_E)$.

Deuxième méthode : en utilisant le cours sur les projecteurs

Posons $p = u - \mathrm{id}_E$, alors

$$p^2 = (u - \mathrm{id}_E)^2 = u^2 - 2u + \mathrm{id}_E = 3u - 2\,\mathrm{id}_E - 2u + \mathrm{id}_E = u - \mathrm{id}_E = p\ :$$

l'endomorphisme p est donc un projecteur de l'espace E ; son **projecteur associé** est $q = \mathrm{id}_E - p = \mathrm{id}_E - (u - \mathrm{id}_E) = 2\,\mathrm{id}_E - u$. *Rappelons que deux projecteurs p et q sont dits* **associés** *s'ils vérifient la relation $p + q = \mathrm{id}_E$, et que cette relation équivaut aux conditions* $\{\mathrm{Ker}\, q = \mathrm{Im}\, p\ ;\ \mathrm{Im}\, q = \mathrm{Ker}\, p\}$. On sait enfin que l'image et le noyau d'un projecteur sont supplémentaires (*géométriquement, l'image est le sous-espace sur lequel on projette, le noyau est la direction de projection*), on a donc

$$E = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, q = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Ker}(-q) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id}_E)\ .$$

---

7. Soient a et b deux réels distincts, soient f, p, q trois endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E vérifiant les relations

$$\begin{cases} \quad p + \quad q = \mathrm{id}_E \\ a\ \ p + b\ \ q = f \\ a^2\ p + b^2\ q = f^2 \end{cases}.$$

a. Vérifier la relation $(f - a\ \mathrm{id}_E) \circ (f - b\ \mathrm{id}_E) = 0$.

b. Montrer que p et q sont des projecteurs associés.

c. Montrer que $f^m = a^m\, p + b^m\, q$ pour tout entier naturel m.

- -

a. On développe, dans $\mathcal{L}(E)$:

$$\begin{aligned} (f - a\ \mathrm{id}_E) \circ (f - b\ \mathrm{id}_E) &= f^2 - (a+b)\, f + ab\ \mathrm{id}_E \\ &= (a^2\, p + b^2\, q) - (a+b)(a\, p + b\, q) + ab(p+q) \\ &= \big[a^2 - (a+b)a + ab\big]\, p + \big[b^2 - (a+b)b + ab\big]\, q \\ &= 0\ . \end{aligned}$$

b. On a déjà la relation $p + q = \mathrm{id}_E$, il ne reste plus qu'à montrer que p et q sont des projecteurs. En fait, il suffit de montrer que p est un projecteur car alors $q^2 = (\mathrm{id}_E - p)^2 = \mathrm{id}_E - 2p + p^2 = \mathrm{id}_E - p = q$, donc q sera aussi un projecteur.

Mais on peut remarquer que $f - a\ \mathrm{id}_E = (ap + bq) - a(p + q) = (b - a)\, q$, et de même $f - b\ \mathrm{id}_E = (a - b)\, p$. La relation obtenue en **a.** se réécrit alors $-(a - b)^2\, q \circ p = 0$, soit $q \circ p = 0$ puisque $a \neq b$. On a donc $(\mathrm{id}_E - p) \circ p = 0$, soit $p - p^2 = 0$: l'endomorphisme p est bien un projecteur, et $q = \mathrm{id}_E - p$ est le projecteur associé (autrement dit $\mathrm{Ker}\, q = \mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Im}\, q = \mathrm{Ker}\, p$).

c. La relation est vraie pour $m = 0$, $m = 1$ et $m = 2$. Si on la suppose vraie pour un m donné, alors

$$f^{m+1} = f \circ f^m = (ap + bq) \circ (a^m\, p + b^m\, q) = a^{m+1}\, p + b^{m+1}\, q$$

si l'on développe en tenant compte des relations $p \circ p = p$, $q \circ q = q$, $q \circ p = p \circ q = 0$. La preuve est donc achevée par récurrence.

8. Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et F un sous-espace vectoriel de E.

a. Exprimer $u^{-1}\big(u(F)\big)$ en fonction de F et de $\operatorname{Ker} u$.

b. Exprimer $u\big(u^{-1}(F)\big)$ en fonction de F et de $\operatorname{Im} u$.

- -

a. Soit $x \in E$, on a alors

$$\begin{aligned} x \in u^{-1}\big(u(F)\big) \quad &\Longleftrightarrow \quad u(x) \in u(F) \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists y \in F \quad u(x) = u(y) \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists y \in F \quad x - y \in \operatorname{Ker} u \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in F + \operatorname{Ker} u \ . \end{aligned}$$

Ainsi, $u^{-1}\big(u(F)\big) = F + \operatorname{Ker} u$.

b. Soit $y \in E$, on a alors

$$y \in u\big(u^{-1}(F)\big) \iff \exists x \in u^{-1}(F) \quad y = u(x) \iff \exists x \in E \quad y = u(x) \quad \text{et} \quad u(x) \in F \ .$$

Donc $u\big(u^{-1}(F)\big) = F \cap \operatorname{Im} u$.

---

9. Soient f, g, h des endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que

$$f \circ g = h \ , \quad g \circ h = f \quad \text{et} \quad h \circ f = g \ .$$

a. Montrer que f, g, h ont même noyau et même image.

b. Montrer que $f^2 = g^2 = h^2$, puis que $f^5 = f$.

c. En déduire que $E = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f)$.

- -

a. La relation $f \circ g = h$ entraîne classiquement $\operatorname{Im}(h) \subset \operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(g) \subset \operatorname{Ker}(h)$. En "faisant tourner", on obtient les inclusions $\operatorname{Im}(h) \subset \operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Im}(g) \subset \operatorname{Im}(h)$, d'où l'égalité des images, et $\operatorname{Ker}(g) \subset \operatorname{Ker}(h) \subset \operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(g)$, d'où l'égalité des noyaux.

b. On omettra le symbole $\circ$ de composition des applications. On a d'abord

$$f^2 = (gh)f = g(hf) = g^2 = (hf)g = h(fg) = h^2 \ .$$

Ensuite,

$$f = gh = g(fg) = g(gh)(hf) = g^2h^2f = f^5 \ .$$

c. Procédons par analyse-synthèse:

• Analyse: soit $x \in E$, supposons $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Im}(f)$ et $z \in \operatorname{Ker}(f)$, alors il existe $t \in E$ tel que $y = f(t)$, ainsi $x = f(t) + z$. En appliquant f^4, on obtient $f^4(x) = f^5(t) = f(t) = y$. Ainsi, $y = f^4(x)$ et $z = x - f^4(x)$, ce qui prouve l'unicité de la décomposition.

• Synthèse: soit $x \in E$, posons $y = f^4(x)$ et $z = x - f^4(x)$. Alors $y + z = x$, et on a bien $y \in \operatorname{Im}(f)$ et $z \in \operatorname{Ker}(f)$ car $f = f^5$, ceci prouve l'existence d'une décomposition.

Applications linéaires en dimension finie.

10. Soit n un entier au moins égal à 2, soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par

$$\Phi \ : \ P \mapsto Q \quad \text{tel que} \quad Q(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2\,P(X)\ .$$

Déterminer le degré du polynôme $Q_k = \Phi(X^k)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$. En déduire l'image de Φ. Déterminer le noyau de Φ.

- -

On s'assure d'abord que Φ est bien un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$: la linéarité est immédiate, et si $Q = \Phi(P)$, on a manifestement $\deg(Q) \leq \deg(P)$, donc Φ va de $\mathbb{K}_n[X]$ dans lui-même.

Mais il y a mieux : calculons les images par Φ des polynômes de la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. Déjà $Q_0 = \Phi(1) = 0$ et $Q_1 = \Phi(X) = 0$, d'où l'inclusion $\mathbb{R}_1[X] = \mathrm{Vect}(1, X) \subset \mathrm{Ker}\,\Phi$. Pour $k \geq 2$, on montre (*calcul laissé à l'estimable lecteur*) que le polynôme $Q_k = \Phi(X^k)$ est de degré $k-2$ exactement, les termes de degrés k et $k-1$ s'annihilant mais pas ceux de degré $k-2$, puisque le coefficient de X^{k-2} dans Q_k est $k(k-1)$.

Or, $\mathrm{Im}\,\Phi$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$ engendré par les vecteurs $\Phi(X^k)$ pour $0 \leq k \leq n$, ou encore pour $2 \leq k \leq n$, puisque les deux premiers sont nuls. La famille $(Q_2, \cdots, Q_n)$ est constituée de polynômes non nuls de degrés tous distincts (famille échelonnée en degrés), elle est donc libre ; et comme elle est constituée de $n-1$ polynômes de $\mathbb{K}_{n-2}[X]$ qui est de dimension $n-1$, c'est une base de $\mathbb{K}_{n-2}[X]$. Donc $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathbb{K}_{n-2}[X]$.

Donc $\mathrm{rg}(\Phi) = \dim(\mathrm{Im}\,\Phi) = n-1$, puis $\dim(\mathrm{Ker}\,\Phi) = (n+1)-(n-1) = 2$ par le théorème du rang. Comme $\mathrm{Ker}\,\Phi$ contient $\mathbb{R}_1[X]$ qui est de dimension 2, alors $\mathrm{Ker}\,\Phi = \mathbb{R}_1[X]$.

---

11. Noyaux itérés d'un endomorphisme. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit u un endomorphisme de E. Pour tout entier naturel k, on note $n_k = \dim(\mathrm{Ker}\,u^k)$.

a. Montrer que la suite (n_k) est croissante.

b. On pose $p = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n_{k+1} = n_k\}$. Justifier l'existence d'un tel entier p.

c. Montrer que $n_k = n_p$ pour tout entier k supérieur à p.

d. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\,u^p \oplus \mathrm{Im}\,u^p$.

- -

a. Pour tout entier k, notons $N_k = \mathrm{Ker}(u^k)$, ce sont les **noyaux itérés** de l'endomorphisme u. On a $N_0 = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E) = \{0_E\}$ donc $n_0 = 0$, et la suite de sous-espaces (N_k) est croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire $N_k \subset N_{k+1}$ (*évident*), d'où il résulte que $n_k \leq n_{k+1}$: la suite d'entiers naturels (n_k) est donc croissante.

b. Il existe au moins un entier k tel que $n_k = n_{k+1}$: en effet, si ce n'était pas le cas, on aurait $n_{k+1} > n_k$ pour tout k et, comme les n_k sont des entiers, cela entraînerait $n_{k+1} \geq n_k + 1$ pour tout k puis, par une récurrence immédiate, $n_k \geq k$ pour tout k, on aurait donc $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k = +\infty$, ce qui est absurde puisqu'on doit avoir $n_k \leq \dim E$ pour tout k.

L'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid n_{k+1} = n_k\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide, elle admet donc un plus petit élément (un minimum) p.

c. On a en particulier $n_{p+1} = n_p$, donc $N_{p+1} = N_p$ (*on connaît l'inclusion $N_p \subset N_{p+1}$ et on a l'égalité des dimensions*). On va prouver que $N_p = N_{p+1} = N_{p+2} = \cdots$, autrement dit la suite des noyaux itérés de u est stationnaire à partir du rang p, il suffit pour cela de prouver que $N_{p+k+1} = N_{p+k}$ pour tout entier naturel k. On a déjà l'inclusion $N_{p+k} \subset N_{p+k+1}$. Soit maintenant $x \in N_{p+k+1}$, alors $u^{p+k+1}(x) = 0_E$, soit $u^{p+1}\big(u^k(x)\big) = 0_E$, donc $u^k(x) \in N_{p+1}$, donc $u^k(x) \in N_p$ (*cf.* plus haut), donc $u^{p+k}(x) = 0_E$ et $x \in N_{p+k}$, ce qui prouve l'inclusion inverse. La suite d'entiers (n_k) est donc aussi stationnaire à partir du rang p.

d. Soit $x \in \operatorname{Ker} u^p \ \cap\ \operatorname{Im} u^p$, alors $u^p(x) = 0_E$ et il existe $y \in E$ tel que $x = u^p(y)$. On a alors $0_E = u^p(x) = u^{2p}(y)$, soit $y \in N_{2p}$. Mais $N_{2p} = N_p$, donc $y \in N_p$, c'est-à-dire $x = u^p(y) = 0_E$. On a ainsi prouvé que $\operatorname{Ker} u^p \cap \operatorname{Im} u^p = \{0_E\}$, ces deux sous-espaces sont donc "en somme directe". Il en résulte que

$$\dim(\operatorname{Ker} u^p + \operatorname{Im} u^p) = \dim(\operatorname{Ker} u^p) + \dim(\operatorname{Im} u^p) = \dim E\ ,$$

la deuxième égalité découlant du théorème du rang. Donc $\operatorname{Ker} u^p + \operatorname{Im} u^p = E$: ces deux sous-espaces sont supplémentaires, ce qui s'écrit $\operatorname{Ker} u^p \oplus \operatorname{Im} u^p = E$.

---

12. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme **nilpotent** (il existe un entier naturel k tel que $u^k = 0$).

a. Soit x un vecteur de E. Soit q le plus petit entier naturel tel que $u^q(x) = 0_E$ (*justifier son existence*). Montrer que la famille $\big(x, u(x), \cdots, u^{q-1}(x)\big)$ est libre. En déduire que $u^n = 0$.

b. On suppose de plus $u^{n-1} \neq 0$ (justifier l'existence de tels endomorphismes). Montrer que l'endomorphisme u n'admet pas de racine carrée (c'est-à-dire il n'existe pas d'endomorphisme f de E tel que $f^2 = u$).

- -

a. Le vecteur $x \in E$ étant fixé, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid u^k(x) = 0_E\}$ est une partie de $\mathbb{N}$, non vide puisque l'endomorphisme u est nilpotent. On peut donc définir un entier naturel $q = \min\{k \in \mathbb{N} \mid u^k(x) = 0_E\}$. Cet entier q ou $q(x)$ dépend du choix du vecteur x. *Remarquons que, si $x \neq 0_E$, alors $q \geq 1$ et $u^{q-1}(x) \neq 0_E$. Si $x = 0_E$, alors $q = 0$ et la famille $\big(x, u(x), \cdots, u^{q-1}(x)\big)$ est vide!* Soient maintenant λ_0, λ_1, $\cdots$, λ_{q-1} des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E$; en appliquant u^{q-1}, on obtient $\lambda_0 u^{q-1}(x) = 0_E$ (puisque $u^k(x) = 0_E$ pour tout $k \geq q$), donc $\lambda_0 = 0$ puisque $u^{q-1}(x)$ n'est pas le vecteur nul. Comme λ_0 est nul, il reste la relation $\displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E$; en appliquant maintenant u^{q-2}, on déduit de la même façon $\lambda_1 = 0$. De proche en proche (*les courageux rédigeront une récurrence, moi je vais aller chercher des champignons dans la forêt*), on montre que les λ_k $(0 \leq k \leq q-1)$ sont tous nuls, la famille considérée est donc libre. Comme $\dim E = n$, cette famille comporte au plus n éléments, soit $q(x) \leq n$ pour tout vecteur x de E. On a donc $u^n(x) = 0_E$ pour tout x, donc u^n est l'endomorphisme nul.

b. Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, il existe des endomorphismes nilpotents d'indice $n-1$ (c'est-à-dire tels que $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$). Pour en construire un, considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E, soit u l'endomorphisme tel que $u(e_1) = 0_E$, et $u(e_k) = e_{k-1}$ si $2 \leq k \leq n$; on vérifie que $u^n(e_k) = 0_E$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ donc $u^n = 0$, mais $u^{n-1}(e_n) = e_1$ donc $u^{n-1} \neq 0$. Cet endomorphisme est représenté dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & & (0) \\ & & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}$.

Supposons qu'il existe un endomorphisme f tel que $f^2 = u$. Alors $u^n = f^{2n} = 0$, donc f est nilpotent. De la question **a.**, on déduit alors que $f^n = 0$. Mais comme $2n - 2 \geq n$ (*à condition bien sûr de supposer que* $n = \dim E \geq 2$), on a aussi $f^{2n-2} = 0$, c'est-à-dire $u^{n-1} = 0$, ce qui est contradictoire. L'endomorphisme u n'admet donc pas de "racine carré".

---

13. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On considère les quatre assertions suivantes:

(1) : $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$

(2) : $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$

(3) : $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$

(4) : $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$.

a. Montrer que (**1**) $\iff$ (**3**) et (**2**) $\iff$ (**4**).

b. Montrer que les quatre assertions sont équivalentes si E est de dimension finie.

c. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

- -

a. (**1**) $\Longrightarrow$ (**3**): Supposons $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$, soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, alors $f(x) = 0_E$ et il existe $t \in E$ tel que $x = f(t)$. Alors $f^2(t) = f(x) = 0_E$, i.e. $t \in \mathrm{Ker}(f^2)$. D'après l'hypothèse, $t \in \mathrm{Ker}(f)$, soit $x = f(t) = 0_E$. Donc $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$.

(**3**) $\Longrightarrow$ (**1**): Supposons $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$. L'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ est triviale. Par ailleurs, si $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$, alors $f(x) \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$ donc $f(x) = 0_E$ d'après l'hypothèse, et $x \in \mathrm{Ker}(f)$.

(**2**) $\Longrightarrow$ (**4**): Supposons $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$. Soit $x \in E$, alors $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, donc $f(x) \in \mathrm{Im}(f^2)$ et il existe $t \in E$ tel que $f(x) = f^2(t)$, i.e. $f\big(x - f(t)\big) = 0_E$, donc $x - f(t) \in \mathrm{Ker}(f)$. On a donc $x = \big(x - f(t)\big) + f(t) \in \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$. On a ainsi prouvé que $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$.

(**4**) $\Longrightarrow$ (**2**): Supposons $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$. L'inclusion $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$ est triviale. Soit alors $x \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$, et l'hypothèse faite permet de décomposer $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y_2 \in \mathrm{Im}(f)$, donc $y_2 = f(z)$ avec $z \in E$. On a alors $x = f(y_1) + f(y_2) = f(y_2) = f^2(z) \in \mathrm{Im}(f^2)$, ce qui prouve l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$.

b. Supposons $\dim(E) = n$. Si on a **(1)**, alors $\dim\big(\mathrm{Im}(f^2)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = n - \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$ par le théorème du rang. Comme on a l'inclusion triviale $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$, on déduit l'égalité, ainsi (**1**) $\Longrightarrow$ (**2**). On montre de même que (**2**) $\Longrightarrow$ (**1**). Les quatre assertions sont donc équivalentes.

c. Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et $f = D : P \mapsto P'$ (opérateur de dérivation). Alors D est surjectif (tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ admet pour antécédent par D le polynôme $\sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$ entre autres), donc D^2 l'est aussi et $\mathrm{Im}(D) = \mathrm{Im}(D^2) = E$. Mais on a $\mathrm{Ker}(D) = \mathbb{K}_0[X]$ et $\mathrm{Ker}(D^2) = \mathbb{K}_1[X]$, donc $\mathrm{Ker}(D^2) \neq \mathrm{Ker}(D)$. Cet endomorphisme D de E satisfait **(2)** et **(4)**, mais pas **(1)** et **(3)**.

Toujours avec $E = \mathbb{K}[X]$, l'endomorphisme $f : P \mapsto XP$ satisfait **(1)** et **(3)**, mais pas **(2)** et **(4)**. *L'estimable lecteur écrira les détails.*

---

14. Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension n. On suppose que $u + v = \mathrm{id}_E$ et $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \leq n$. Montrer que u et v sont des projecteurs.

- -

Le théorème du rang donne $(n - \dim \mathrm{Ker}\, u) + (n - \dim \mathrm{Ker}\, v) \leq n$, soit encore $\dim(\mathrm{Ker}\, u) + \dim(\mathrm{Ker}\, v) \geq n$. Or, les sous-espaces $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Ker}\, v$ sont en somme directe: si $x \in \mathrm{Ker}\, u\ \cap\ \mathrm{Ker}\, v$, alors $x = \mathrm{id}_E(x) = u(x) + v(x) = 0_E$, donc $\dim(\mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Ker}\, v) \geq n$, et finalement $\dim(\mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Ker}\, v) = n$, et $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Ker}\, v = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - u)$.

Si un vecteur x de E se décompose en $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(u)$ et $z \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - u)$, alors $u(x) = u(y) + u(z) = z$, puis $u^2(x) = u(z) = z = u(x)$, on a donc $u^2 = u$ et u est un projecteur. Comme u et v jouent le même rôle, v est aussi un projecteur. Ce sont deux projecteurs “associés”.

---

15. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E, vérifiant $f \circ g = \mathrm{id}_E$.

a. Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$.

b. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.

c. Dans quel cas peut-on conclure que $g = f^{-1}$?

d. Que dire de l'endomorphisme $g \circ f$?

- -

a. L'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ est banale. De $f = (f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f)$, on déduit l'autre inclusion.

De même, l'inclusion $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$ est triviale, l'inclusion réciproque résulte de $g = g \circ (f \circ g) = (g \circ f) \circ g$.

b. Procédons par analyse-synthèse.

Analyse: soit $x \in E$, supposons $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(f)$ et $z \in \mathrm{Im}(g)$, il existe donc $t \in E$ tel que $z = g(t)$. Ensuite, $f(x) = f(z) = (f \circ g)(t) = t$, donc $z = g(t) = (g \circ f)(x)$ et, par différence, $y = x - (g \circ f)(x)$. Cela prouve l'unicité de la décomposition.

Synthèse: Soit $x \in E$, posons $y = x - (g \circ f)(x)$ et $z = (g \circ f)(x)$, alors $y + z = x$, et on a bien $f(y) = f(x) - (f \circ g)\big(f(x)\big) = 0_E$ donc $y \in \mathrm{Ker}(f)$ et $z = g\big(f(x)\big) \in \mathrm{Im}(g)$, ce qui prouve l'existence de la décomposition.

Variante. On a $(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ f$, ainsi $g \circ f$ est un projecteur, il résulte alors du cours que $E = \mathrm{Ker}(g \circ f) \oplus \mathrm{Im}(g \circ f)$, ce qui permet de conclure avec la question **a.**

c. Pour affirmer que $g = f^{-1}$, il faudrait avoir aussi $g \circ f = \mathrm{id}_E$, c'est le cas notamment si E est de dimension finie. En effet, dans ce cas, f étant injective (conséquence immédiate de $f \circ g = \mathrm{id}_E$), elle est alors bijective d'où l'existence de la réciproque f^{-1}; ensuite,

$$g = (f^{-1} \circ f) \circ g = f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ \mathrm{id}_E = f^{-1} \ .$$

d. L'endomorphisme $g \circ f$ est un projecteur, *cf.* question **b.**

---

16. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie.

a. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min\big\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\big\}$.

b. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \geq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim(E)$. *Considérer l'application linéaire* $u = g\Big|_{\mathrm{Im}(f)}$.

c. Soient $f_1, \cdots, f_m$ des endomorphismes de E. Montrer que

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(f_1 \circ \cdots \circ f_m)\big) \leq \sum_{k=1}^{m} \dim\big(\mathrm{Ker}\, f_k\big) \ .$$

- -

a. On a $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$, d'où, en passant aux dimensions, $\mathrm{rg}(g \circ f) \subset \mathrm{rg}(g)$. Par ailleurs, $\mathrm{Im}(g \circ f) = g\big(\mathrm{Im}(f)\big)$ et, comme une application linéaire diminue toujours les dimensions, $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(f)$. On a bien obtenu $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min\big\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\big\}$.

b. On applique le théorème du rang à l'application linéaire $u = g\Big|_{\mathrm{Im}(f)} : \mathrm{Im}\, f \to E$, cela donne

$$\dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim(\mathrm{Im}\, u) + \dim(\mathrm{Ker}\, u) \ .$$

mais $\mathrm{Im}\, u = g(\mathrm{Im}\, f) = \mathrm{Im}(g \circ f)$ et $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, g \ \cap\ \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$, donc

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g \circ f) + \dim(\mathrm{Ker}\, g \ \cap\ \mathrm{Im}\, f) \leq \mathrm{rg}(g \circ f) + \dim(\mathrm{Ker}\, g) \ ,$$

ou encore $\mathrm{rg}(g \circ f) \geq \mathrm{rg}(f) - \dim(\mathrm{Ker}\, g)$. En appliquant maintenant le théorème du rang à l'application linéaire g, on a $\dim(\mathrm{Ker}\, g) = \dim E - \mathrm{rg}(g)$ et, en substituant, il vient

$$\mathrm{rg}(g \circ f) \geq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim(E) \ .$$

c. Par récurrence sur m: la propriété est triviale pour $m = 1$ et, si elle est vraie pour un $m \in \mathbb{N}^*$ donné, soient $m+1$ endomorphismes $f_1, \cdots, f_m, f_{m+1}$, posons $g = f_1 \circ \cdots \circ f_m$, on a par hypothèse $\dim\big(\mathrm{Ker}(g)\big) \leq \sum_{k=1}^{m} \dim\big(\mathrm{Ker}\, f_k\big)$, ce qui s'écrit aussi, grâce au théorème du rang

$$\mathrm{rg}(g) \geq \sum_{k=1}^{m} \mathrm{rg}(f_k) - (m-1)\ \dim(E) \ .$$

En appliquant le **b.**, on déduit

$$\mathrm{rg}(f_1 \circ \cdots \circ f_m \circ f_{m+1}) = \mathrm{rg}(g \circ f_{m+1}) \geq \mathrm{rg}(g) + \mathrm{rg}(f_{m+1}) - \dim(E) \geq \sum_{k=1}^{m+1} \mathrm{rg}(f_k) - m\ \dim(E) \ ,$$

ce qui, de nouveau par le théorème du rang, donne $\dim\big(\operatorname{Ker}(f_1\circ\cdots\circ f_{m+1})\big) \leq \sum_{k=1}^{m+1} \dim\big(\operatorname{Ker} f_k\big)$,

ce qu'il fallait démontrer.

---

17. Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n. On suppose que $f\circ g = 0$ et que $f+g$ est un automorphisme de l'espace vectoriel E. Montrer que

$$\operatorname{Im}(f)\oplus\operatorname{Im}(g) = E\ .$$

- -

L'endomorphisme $f+g$ est en particulier surjectif, donc $\operatorname{Im}(f+g) = E$, donc $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = E$: en effet, on a toujours l'inclusion $\operatorname{Im}(f+g)\subset \operatorname{Im} f+\operatorname{Im} g$.

Il reste donc à montrer que la somme est directe, c'est-à-dire $\operatorname{Im} f\ \cap\ \operatorname{Im} g = \{0\}$. Or

$$\begin{aligned}\dim(\operatorname{Im} f\ \cap\ \operatorname{Im} g) &= \dim(\operatorname{Im} f)+\dim(\operatorname{Im} g)-\dim(\operatorname{Im} f+\operatorname{Im} g)\\ &= \operatorname{rg}(f)+\operatorname{rg}(g)-n\ .\end{aligned}$$

Mais la relation $f\circ g = 0$ se traduit par $\operatorname{Im} g\subset \operatorname{Ker} f$, qui implique

$$\operatorname{rg}(g) = \dim(\operatorname{Im} g)\leq \dim(\operatorname{Ker} f) = n-\operatorname{rg}(f)\ ,$$

donc $\dim(\operatorname{Im} f\ \cap\ \operatorname{Im} g) = \operatorname{rg}(f)+\operatorname{rg}(g)-n\leq 0$, d'où la conclusion.

---

18. Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

a. Montrer que $\operatorname{rg}(g\circ f) = \operatorname{rg}(g) \iff E = \operatorname{Im}(f)+\operatorname{Ker}(g)$.

b. Montrer que $\operatorname{rg}(g\circ f) = \operatorname{rg}(f) \iff \operatorname{Im}(f)\ \cap\ \operatorname{Ker}(g) = \{0\}$.

- -

a. $\Longrightarrow$ Supposons $\operatorname{rg}(g\circ f) = \operatorname{rg}(g)$. Comme on a l'inclusion triviale $\operatorname{Im}(g\circ f)\subset \operatorname{Im}(g)$ et l'égalité des dimensions, on a donc $\operatorname{Im}(g) = \operatorname{Im}(g\circ f)$. Soit $x\in E$, alors $g(x)\in \operatorname{Im}(g)$ donc $g(x)\in \operatorname{Im}(g\circ f)$, donc il existe $y\in E$ tel que $g(x) = g\big(f(y)\big)$. On a alors $g\big(x-f(y)\big) = 0_E$ donc $x-f(y)\in \operatorname{Ker}(g)$. Ainsi, $x = f(y)+\big(x-f(y)\big)\in \operatorname{Im}(f)+\operatorname{Ker}(g)$.

$\Longleftarrow$ Supposons $E = \operatorname{Im}(f)+\operatorname{Ker}(g)$, montrons alors que $\operatorname{Im}(g\circ f) = \operatorname{Im}(g)$. L'inclusion directe est immédiate. Réciproquement, soit $y\in \operatorname{Im}(g)$, alors il existe $x\in E$ tel que $y = g(x)$, on peut décomposer $x = x_1+x_2$ avec $x_1\in \operatorname{Im}(f)$ et $x_2\in \operatorname{Ker}(g)$, donc il existe $t\in E$ tel que $x_1 = f(t)$, puis $y = g(x_1+x_2) = g(x_1) = g\big(f(t)\big)\in \operatorname{Im}(g\circ f)$. On a donc aussi l'inclusion $\operatorname{Im}(g)\subset \operatorname{Im}(g\circ f)$.

b. $\Longrightarrow$ Supposons $\operatorname{rg}(g\circ f) = \operatorname{rg}(f)$. Par le théorème du rang, on en déduit que $\dim \operatorname{Ker}(g\circ f) = \dim(\operatorname{Ker} f)$. Comme on a l'inclusion triviale $\operatorname{Ker}(f)\subset \operatorname{Ker}(g\circ f)$, on a donc $\operatorname{Ker}(g\circ f) = \operatorname{Ker}(f)$. Soit alors $x\in \operatorname{Im}(f)\ \cap\ \operatorname{Ker}(g)$, on a donc $g(x) = 0_E$ et il existe $t\in E$ tel que $x = f(t)$. Ainsi, $g\big(f(t)\big) = 0_E$ et $t\in \operatorname{Ker}(g\circ f)$, d'où $t\in \operatorname{Ker}(f)$, donc $x = f(t) = 0_E$. On a bien prouvé que $\operatorname{Im}(f)\ \cap\ \operatorname{Ker}(g) = \{0_E\}$.

$\Longleftarrow$ Supposons $\operatorname{Im}(f)\ \cap\ \operatorname{Ker}(g) = \{0_E\}$. On a l'inclusion triviale $\operatorname{Ker}(f)\subset \operatorname{Ker}(g\circ f)$, montrons donc l'inclusion réciproque! Si $x\in \operatorname{Ker}(g\circ f)$, alors $g\big(f(x)\big) = 0_E$, donc $f(x)\in \operatorname{Im}(f)\ \cap\ \operatorname{Ker}(g)$, donc $f(x) = 0_E$ et $x\in \operatorname{Ker}(f)$. De l'égalité $\operatorname{Ker}(g\circ f) = \operatorname{Ker}(f)$, on déduit l'égalité des dimensions de ces sous-espaces puis, par théorème du rang, l'égalité $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

Calcul matriciel.

19. Soit n un entier naturel, $n \geq 2$. Les lettres i, j, k, l représenteront des entiers de l'intervalle $[\![1, n]\!]$. On note E_i (avec un seul indice) le i-ème vecteur de la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, i.e. $E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le coefficient 1 étant placé à la position i. On note $E_{i,j}$ (avec deux indices) la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient en position (i,j) vaut 1, les autres étant nuls, $E_{i,j}$ est appelée **matrice élémentaire**.

a. Effectuer les produits $E_i^\top E_j$, $E_i E_j^\top$ et $E_{i,j}E_{k,l}$. *On pourra utiliser le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.*

b. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Que représentent les produits $E_i^\top A$, AE_j et $E_i^\top AE_j$?

c. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $AE_{i,j} = E_{i,j}A$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$. Montrer que A est une **matrice scalaire**, i.e. de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

d. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A commute avec toute matrice inversible:

$$\forall M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad AM = MA\ .$$

Montrer que A est une matrice scalaire.

- -

a. D'abord $E_i^\top E_j \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}$ est un scalaire, on obtient $E_i^\top E_j = \delta_{i,j}$. *Plus généralement, si $X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^\top$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}^\top$ sont deux matrices-colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $X^\top Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un scalaire que l'on peut interpréter (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) comme le produit scalaire des "vecteurs" X et Y, il s'agit ici du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.*

Puis $E_i E_j^\top \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée et on vérifie que $E_i E_j^\top = E_{i,j}$. *Plus généralement, si $X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^\top$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}^\top$ sont deux matrices-colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors $XY^\top$ est une matrice carrée d'ordre n dont le coefficient d'indices (i,j) vaut $x_i y_j$. On pourra noter que cette matrice $XY^\top$ est nulle si et seulement si l'un des vecteurs X ou Y est nul et que, sinon, elle est de rang 1.*

Enfin, par associativité, $E_{i,j}E_{k,l} = (E_i E_j^\top)(E_k E_l^\top) = E_i\ (E_j^\top E_k)\ E_l^\top = \delta_{j,k}\ E_i E_l^\top$, on obtient la **règle des dominos**:

$$E_{i,j}\ E_{k,l} = \delta_{j,k}\ E_{i,l}\ .$$

b. Les matrices-éléments $E_{i,j}$ constituent la base canonique de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on écrit donc la matrice A sous la forme $A = \sum_{k,l} a_{k,l} E_{k,l}$ (on somme sur tous les couples (k,l)

appartenant à $[\![1,n]\!]^2$). Alors $E_i^\top A \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ est une matrice-ligne, plus précisément

$$E_i^\top A = E_i^\top \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{k,l} E_{k,l}\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{k,l} E_i^\top E_{k,l} \ ,$$

mais $E_i^\top E_{k,l} = E_i^\top (E_k E_l^\top) = (E_i^\top E_k) E_l^\top = \delta_{i,k} E_l^\top$, donc

$$E_i^\top A = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \delta_{i,k} a_{k,l} E_l^\top = \sum_{l=1}^n a_{i,l} E_l^\top = \begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \end{pmatrix} = L_i(A) \ ,$$

c'est la i-ième ligne de la matrice A. *Bien sûr on peut retrouver ce résultat de façon un peu moins formelle, mais c'est aussi un bon entraînement de travailler un peu avec les matrices E_i et $E_{i,j}$.*

De façon analogue, $AE_j = \displaystyle\sum_{k=1}^n a_{k,j} E_k = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la n-ième colonne de A.

Enfin, $E_i^\top A E_j = a_{i,j} \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}$ est le coefficient d'indices (i,j) de la matrice A.

c. Identifions les coefficients d'indices (k,l) des matrices $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$, on peut écrire cela sous la forme

$$E_k^\top A E_{i,j} E_l = E_k^\top E_{i,j} A E_l \ ,$$

soit encore

$$E_k^\top A E_i E_j^\top E_l = E_k^\top E_i E_j^\top A E_l \ ,$$

soit encore

$$\forall (i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4 \qquad \delta_{j,l}\, a_{k,i} = \delta_{k,i}\, a_{j,l} \ .$$

En prenant i et k distincts et, par exemple, $j = l = 1$, on obtient $a_{k,i} = 0$: les coefficients de A en dehors de la diagonale sont donc nuls.

En prenant i et k égaux et $j = l = 1$, on obtient $a_{i,i} = a_{1,1}$: les coefficients diagonaux de la matrice A sont tous égaux.

Donc A est une matrice scalaire.

d. Les matrices $I_n + E_{i,j}$ sont inversibles. En effet,

- si $i = j$, c'est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux valent 1 sauf celui en i-ème position qui vaut 2 ;

- si $i \neq j$, c'est une matrice triangulaire (supérieure si $i < j$, inférieure si $i > j$) dont les coefficients diagonaux valent 1.

Remarque. Ces matrices sont associées à des opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes, il s'agit de **matrices de dilatation** si $i = j$, et **de transvection** si $i \neq j$.

La matrice A commute donc avec toutes les matrices $I_n + E_{i,j}$, i.e.

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \qquad A(I_n + E_{i,j}) = (I_n + E_{i,j})A \ .$$

On en déduit facilement que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \qquad AE_{i,j} = E_{i,j}A \ .$$

De la question **c.**, on déduit alors que A est une matrice scalaire.

20. On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Montrer que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et que cet ensemble est stable par le produit matriciel. Montrer que, si une matrice A de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est inversible, alors son inverse A^{-1} appartient aussi à $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. *Pour cette dernière question, on pourra considérer l'application* $\varphi : M \mapsto AM$.

- -

• Clairement, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices-éléments $E_{i,j}$ telles que $i \leq j$. On en déduit facilement que $\dim\Big(\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})\Big) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

• Pour montrer la stabilité de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ par produit, il y a plusieurs options possibles:

- montrer que, si $E_{i,j}$ et $E_{k,l}$ sont deux matrices élémentaires avec $i \leq j$ et $k \leq l$, alors leur produit est encore dans $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (la stabilité de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ par combinaisons linéaires achèvera la preuve), et ceci est vrai puisque $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$ (règle des dominos) est nulle si $j \neq k$, et vaut $E_{i,l}$ avec $i \leq l$ si $j = k$.

- travailler sur les coefficients: une matrice $A = (a_{i,j})$ est triangulaire supérieure si et seulement si $a_{i,j}$ est nul pour tout couple (i,j) tel que $i > j$. Si A et B sont triangulaires supérieures, soit $C = AB$, on a alors $c_{i,k} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,k}$ et, si $i > k$, pour tout j on a alors $i > j$ ou $j > k$ (la contraposée est immédiate: si $i \leq j$ et $j \leq k$, alors $i \leq k$), donc le produit $a_{i,j}b_{j,k}$ est nul. Les coefficients $c_{i,k}$ avec $i > k$ sont donc nuls et $C = AB \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

- raisonner en termes de sous-espaces stables par l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé, on aura l'occasion d'en parler bientôt!

• Soit $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, supposée inversible. Soit l'application $\varphi : \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \to \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ définie par $\varphi(M) = AM$. Il est légitime de faire aller cette application de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ vers lui-même puisque l'on vient de prouver que, si A et M sont toutes deux triangulaires supérieures, alors le produit AM l'est aussi. Cette application φ est clairement linéaire, c'est donc un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Elle est injective, c'est une conséquence de l'inversibilité de A. Comme l'espace vectoriel $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est de dimension finie, elle est alors bijective, donc la matrice I_n, qui appartient à $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, admet un antécédent par φ ... ce qui signifie que $A^{-1} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

---

21. Théorème d'Hadamard. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice **à diagonale strictement dominante**, c'est-à-dire telle que

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \qquad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \,.$$

Supposons qu'il existe un vecteur **non nul** $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $AX = 0$, soit $s \in [\![1,n]\!]$ un indice tel que $|x_s| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. En considérant la s-ième coordonnée du vecteur AX, obtenir une contradiction. En déduire que la matrice A est inversible.

- -

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale strictement dominante, supposons qu'il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ **non nul** tel que $AX = 0$. Soit $s \in [\![1, n]\!]$ un indice tel que $|x_s| = \|X\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i| > 0$. En écrivant que la s-ième coordonnée du vecteur AX est nulle, on obtient la relation $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{s,j} x_j = 0$, que l'on peut écrire sous la forme $a_{s,s} x_s = -\displaystyle\sum_{j \neq s} a_{s,j} x_j$, d'où l'on déduit

$$|a_{s,s}|\,|x_s| = \left|\sum_{j \neq s} a_{s,j} x_j\right| \leq \sum_{j \neq s} |a_{s,j}|\,|x_j| \leq \Big(\sum_{j \neq s} |a_{s,j}|\Big)\,|x_s|\ .$$

En divisant par $|x_s|$ (qui est un réel strictement positif), on obtient $|a_{s,s}| \leq \displaystyle\sum_{j \neq s} |a_{s,j}|$, ce qui est absurde. On a donc $AX = 0 \Longrightarrow X = 0$, la matrice A est inversible (c'est le **théorème d'Hadamard**).

À titre d'exemple, les matrices ci-dessous sont à diagonale strictement dominante, donc inversibles :

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & -3 \\ -2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ .$$

---

22. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, soit u un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$. Quelle inégalité peut-on obtenir concernant le rang de u ? Si $\mathrm{rg}\, u = r$ $(r \neq 0)$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est $M = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- -

• La relation $u^2 = 0$ se traduit "trivialement" par l'inclusion $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u$, d'où l'on déduit que $\dim(\mathrm{Im}\, u) \leq \dim(\mathrm{Ker}\, u)$. Mais, par le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}\, u) = n - \mathrm{rg}(u)$, cela donne donc $\mathrm{rg}\, u \leq n - \mathrm{rg}\, u$, ou encore $\mathrm{rg}(u) \leq \dfrac{n}{2}$, soit encore $\mathrm{rg}(u) \leq \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$.

• Pour obtenir la matrice demandée dans une certaine base de E, on voit que la base doit être adaptée à $\mathrm{Ker}\, u$ (les $n-r$ premiers vecteurs sont dans $\mathrm{Ker}\, u$). Soit donc S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$ dans E ; alors S est de dimension r, notons $(e_{n-r+1}, \cdots, e_n)$ une base de S, et pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, posons $e_i = u(e_{n-r+i})$, ceci est cohérent puisque $r \leq n-r$. Les vecteurs $e_1, \cdots, e_r$ sont alors dans $\mathrm{Im}\, u$, et comme il y a r vecteurs dans un espace de dimension r, pour montrer que $(e_1, \cdots, e_r)$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$, il suffit de montrer que la famille est libre ; supposons $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i = 0_E$ avec les λ_i scalaires, alors

$$0_E = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u(e_{n-r+i}) = u\Big(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_{n-r+i}\Big)\ .$$

Le vecteur $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_{n-r+i}$ appartient alors à $S \cap \mathrm{Ker}(u)$, donc est nul puisque ces deux sous-espaces sont en somme directe ; comme la famille $(e_{n-r+1}, \cdots, e_n)$ est libre, on déduit enfin que les λ_i sont tous nuls. La famille $(e_1, \cdots, e_r)$ est donc une famille libre dans $\mathrm{Ker}\, u$, on peut donc la compléter en une base $(e_1, \cdots, e_r, e_{r+1}, \cdots, e_{n-r})$ de $\mathrm{Ker}\, u$. Comme $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus S$, la famille $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, obtenue par concaténation d'une base de $\mathrm{Ker}\, u$ et d'une base de S, est une base de E. Il est alors facile de vérifier que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

---

23. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $A = X^4 - 1$, $B = X^4 - X$. On considère l'application φ de E dans E qui, à tout polynôme P, associe le reste dans la division euclidienne de AP par B.

a. Montrer que φ est un endomorphisme de E.

b. Écrire la matrice de φ relativement à la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

c. Déterminer $\mathrm{Ker}\, \varphi$.

d. Montrer que $\mathrm{Im}\, \varphi = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$.

- -

a. L'image d'un polynôme de $E = \mathbb{R}_3[X]$ est bien un élément de E (le reste d'une division par $X^4 - X$ est de degré au plus trois). Si $\varphi(P_1) = R_1$ et $\varphi(P_2) = R_2$, on a alors $AP_1 = BQ_1 + R_1$, $AP_2 = BQ_2 + R_2$ avec $\deg R_1 < 4$, $\deg R_2 < 4$, où Q_1 et Q_2 sont deux polynômes. Si λ et μ sont deux réels, on a alors $A(\lambda P_1 + \mu P_2) = B(\lambda Q_1 + \mu Q_2) + (\lambda R_1 + \mu R_2)$, avec $\deg(\lambda R_1 + \mu R_2) < 4$, ce qui montre que ce dernier polynôme est bien le reste de la division euclidienne de $A\,(\lambda P_1 + \mu P_2)$ par B, autrement dit que

$$\varphi(\lambda P_1 + \mu P_2) = \lambda R_1 + \mu R_2 = \lambda\, \varphi(P_1) + \mu\, \varphi(P_2)\ .$$

On a ainsi montré la linéarité de φ, qui est donc un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

b. On calcule $\varphi(1) = X - 1$, $\varphi(X) = X^2 - X$, $\varphi(X^2) = X^3 - X^2$, $\varphi(X^3) = -X^3 + X$, d'où la matrice représentant φ dans la base canonique : $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

c. Considérons une matrice-colonne $V = (\,a \quad b \quad c \quad d\,)^\top$; le système $AV = 0$ s'écrit

$$\big\{a = 0\ ;\ a - b + d = 0\ ;\ b - c = 0\ ;\ c - d = 0\big\}$$

et se ramène à $\big\{a = 0\ ;\ b = c = d\big\}$. Le noyau de l'endomorphisme φ est donc constitué des polynômes de la forme $bX^3 + bX^2 + bX$: c'est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $X^3 + X^2 + X$.

d. Le sous-espace $\mathrm{Im}\, \varphi$ est de dimension trois, d'après le théorème du rang ; on peut en construire une base en prenant trois vecteurs-colonnes de la matrice M qui soient linéairement indépendants (on a $\mathrm{rg}\, \varphi = \mathrm{rg}\, M = 3$), par exemple $\mathrm{Im}\, \varphi = \mathrm{Vect}(X - 1, X^2 - X, X^3 - X^2)$ en choisissant les trois premières colonnes. Ces trois polynômes admettent effectivement 1 pour racine, d'où l'inclusion $\mathrm{Im}\, \varphi \subset H$, en posant $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$; mais on a aussi égalité des dimensions car H est un hyperplan de E puisque c'est le noyau de la forme linéaire non nulle $P \mapsto P(1)$ sur E. Donc $\operatorname{Im}\varphi = H$.

---

24. Inverser les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & & & (1) \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 2 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- -

a. On applique la méthode du pivot de Gauss-Jordan à la matrice augmentée $A' = \Big(A \mid I_n \Big)$, soit $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{R})$, précisément on effectue les opérations élémentaires sur les lignes $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, ainsi de suite jusqu'à $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$, on obtient $A'' = \Big(I_n \mid A^{-1} \Big)$, avec $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$.

b. En effectuant les mêmes opérations qu'en **a.** sur la matrice augmentée $B' = \Big(B \mid I_n \Big)$, on obtient la matrice augmentée $\Big(A \mid A^{-1} \Big)$. La matrice élémentaire associée à ces opérations sur les lignes étant A^{-1}, on a donc $A = A^{-1}B$, on réitère alors ces mêmes opérations pour obtenir la matrice augmentée $\Big(I_n \mid B^{-1} \Big)$, avec $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & (0) & & & 1 & -2 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$.

Notons que $B = A^2$, donc $B^{-1} = (A^2)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^2$.

Sommes de sous-espaces vectoriels.

25. Soient $E_1, \cdots, E_m$ et $F_1, \cdots, F_m$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose que $\bigoplus_{i=1}^{m} E_i = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$ et que $E_i \subset F_i$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$. Montrer que $E_i = F_i$ pour tout i.

- -

Il suffit de montrer que $F_i \subset E_i$ pour tout i.

Or, si y_i est un vecteur appartenant à F_i, notons $y_i = \sum_{j=1}^{m} x_j$ sa décomposition suivant la somme directe $E = \bigoplus_{j=1}^{m} E_j$; on a alors, pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, $x_j \in E_j$ donc $x_j \in F_j$; cette écriture est donc aussi la décomposition du vecteur y_i suivant la somme directe $E = \bigoplus_{j=1}^{m} F_j$; par unicité de cette dernière décomposition, on déduit $y_i = x_i \in E_i$ (et $x_j = 0_E$ pour tout $j \neq i$).

---

26. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient $p_1, \cdots, p_m$ des endomorphismes de E vérifiant les relations

$$p_i \circ p_j = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{m} p_i = \mathrm{id}_E \ .$$

Montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Im} p_i$. Interpréter géométriquement les p_i.

- -

Comme $\sum_{i=1}^{m} p_i = \mathrm{id}_E$, on a déjà $\forall x \in E \quad x = \sum_{i=1}^{m} p_i(x)$, donc $E = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Im} p_i$.

De plus, $p_i = p_i \circ \mathrm{id}_E = p_i \circ \left(\sum_{j=1}^{m} p_j \right) = \sum_{j=1}^{m} p_i \circ p_j = p_i^2$ puisque $p_i \circ p_j$ est nul pour $i \neq j$, donc p_i est un projecteur pour tout i.

Montrons que les sous-espaces $\operatorname{Im} p_i$ sont en somme directe : si le vecteur nul se décompose en $0_E = \sum_{i=1}^{m} x_i$ avec, pour tout i, $x_i \in \operatorname{Im} p_i$, alors $p_i(x_i) = x_i$ pour tout i (*tout vecteur appartenant à l'image d'un projecteur est invariant par ce projecteur*), et si $i \neq j$, alors $p_j(x_i) = p_j \circ p_i(x_i) = 0_E$, donc pour tout j,

$$0_E = p_j(0_E) = p_j \left(\sum_{i=1}^{m} x_i \right) = \sum_{i=1}^{m} p_j(x_i) = p_j(x_j) = x_j \ :$$

on a montré que chaque composante de la décomposition est nulle, ce qui prouve que la somme est directe. On a ainsi prouvé que $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Im} p_i$.

Enfin, soit $x \in E$ se décomposant en $x = \sum_{j=1}^{m} x_j$ avec $x_j \in \operatorname{Im} p_j$ pour tout j. Un calcul analogue à celui fait ci-dessus montre que $p_i(x) = x_i$ pour tout i. Donc p_i est le projecteur sur $\operatorname{Im} p_i$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} \operatorname{Im} p_j$.

Sous-espaces stables.

27. Soit p un projecteur dans un espace vectoriel E, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f et p commutent si et seulement si $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont stables par f.

- -

L'implication dans le sens direct est du cours: lorsque deux endomorphismes commutent, le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.

Supposons $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p$ stables par f. On sait que $\mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p = E$ puisque p est un projecteur. Soit donc un vecteur x de E, décomposons-le en $x = y + z$ avec $y = p(x) \in \mathrm{Im}\, p$ et $z \in \mathrm{Ker}\, p$. Alors $(f \circ p)(x) = f\big(p(x)\big) = f(y)$, tandis que $f(x) = f(y) + f(z)$ avec $f(y) \in \mathrm{Im}\, p$ et $f(z) \in \mathrm{Ker}\, p$ (puisque ces deux sous-espaces sont stables par f), donc $(p \circ f)(x) = p\big(f(x)\big) = p\big(f(y)\big) = f(y)$ puisque tout vecteur appartenant à l'image d'un projecteur est invariant par ce projecteur. On a ainsi prouvé que $f \circ p = p \circ f$. D'où l'équivalence demandée.

---

28. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On pose

$$N = \bigcup_{p=0}^{+\infty} \mathrm{Ker}(u^p) \quad \text{et} \quad I = \bigcap_{p=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u^p)\ .$$

a. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N = \mathrm{Ker}(u^n)$ et $I = \mathrm{Im}(u^n)$.

b. Établir que N et I sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires stables par u, et que les endomorphismes induits u_N et u_I sont respectivement nilpotent et bijectif.

c. Réciproquement on suppose $E = F \oplus G$, avec F et G sous-espaces vectoriels stables par u tels que les endomorphismes induits u_F et u_G soient respectivement nilpotent et bijectif. Établir $F = N$ et $G = I$.

- -

a. Si, pour tout k entier naturel, on pose $N_k = \mathrm{Ker}(u^k)$ (noyaux itérés) et $I_k = \mathrm{Im}(u^k)$ (images itérées), il est classique que la suite (N_k) est croissante pour l'inclusion, i.e. $N_k \subset N_{k+1}$ et qu'il existe un rang n à partir duquel elle est stationnaire, alors $N = \mathrm{Ker}(u^n)$. La suite (I_k), qui elle est décroissante pour l'inclusion, est alors stationnaire à partir de ce même rang n et on a $I = \mathrm{Im}(u^n)$. *Le lecteur trouvera les détails dans l'exercice 11 ci-dessus.*

b. On a $E = N \oplus I$ (*cf. exercice 11*), les s.e.v. N et I sont stables par u car ils sont respectivement le noyau et l'image de l'endomorphisme u^n qui commute avec u.

Si $x \in N$, alors $u^n(x) = (u_N)^n(x) = 0_E$, donc $(u_N)^n = 0$, l'endomorphisme u_N de N est nilpotent.

Si $x \in I$ vérifie $u_I(x) = 0_I$, soit $u(x) = 0_E$, alors $x \in \mathrm{Ker}(u)$ donc $x \in N\ \cap\ I$. Comme $E = N \oplus I$, on déduit $x = 0_E$, on a prouvé que u_I est injectif. Comme c'est un endomorphisme d'un e.v. de dimension finie, il est bijectif.

c. Soit $x \in F$, alors comme u_F est nilpotent, il existe k entier tel que $u^k(x) = (u_F)^k(x) = 0_E$, donc $x \in N$. On a ainsi prouvé l'inclusion $F \subset N$.

Soit $x_0 \in G$, alors comme u_G est bijectif donc surjectif, il existe $x_1 \in G$ tel que $x_0 = u_G(x_1) = u(x_1)$. On peut réitérer: il existe x_2 dans G tel que $u(x_2) = x_1$, alors

$x_0 = u^2(x_2)$. On construit par récurrence une suite (x_k) de vecteurs de G telle que, pour tout k entier naturel, $x_0 = u^k(x_k)$, ce qui prouve que $x_0 \in I$. On a ainsi l'inclusion $G \subset I$.

On a donc $E = F \oplus G = N \oplus I$ avec $F \subset N$ et $G \subset I$, ce qui entraîne $F = N$ et $G = I$. En effet, si $x \in N$, on peut décomposer x en $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On a alors l'égalité $x - x_F = x_G$ avec $x - x_F \in N$ et $x_G \in I$ et, ces deux sous-espaces étant supplémentaires, on déduit que $x - x_F = x_G = 0_E$, donc $x = x_F \subset F$. On a donc prouvé l'inclusion $N \subset F$, d'où $F = N$. On obtient pareillement $G = I$.

Matrices par blocs.

29*. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, soient V un sous-espace vectoriel de E et W un sous-espace vectoriel de F. Montrer que l'ensemble

$$X = \Big\{ f \in \mathcal{L}(E,F) \mid V \subset \operatorname{Ker} f \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f \subset W \Big\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$ et préciser sa dimension.

- -

Il est clair que X est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.

Interprétons matriciellement: posons $p = \dim(E)$, $k = \dim(V)$, $n = \dim(F)$, $r = \dim(W)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_k, e_{k+1}, \cdots, e_p)$ une base de E adaptée à V. Soit $\mathcal{C} = (f_1, \cdots, f_r, f_{r+1}, \cdots, f_n)$ une base de F adaptée à W. Une application linéaire f de E vers F est alors représentée dans ces bases par une matrice $M = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ de format (n,p). On peut décomposer M en quatre blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_{r,k}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{r,p-k}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-r,k}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n-r,p-k}(\mathbb{K})$. La condition $V \subset \operatorname{Ker} f$ se traduit par la nullité des blocs A et C. La condition $\operatorname{Im} f \subset W$ se traduit par la nullité des blocs C et D. Finalement, $f \in X$ *si et seulement si* M est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de cette forme est clairement isomorphe à $\mathcal{M}_{r,p-k}(\mathbb{K})$, donc de dimension $r(p-k)$. Enfin, l'application $f \mapsto \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ étant elle aussi un isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ vers $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a donc

$$\dim(X) = r(p-k) = (\dim W)\,(\dim E - \dim V)\ .$$

---

30. Soient $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de M en fonction de celui de D.

- -

On procède par opérations élémentaires sur les colonnes. On peut ainsi transformer M en M' puis en M'' avec:

$$M' = \begin{pmatrix} I_p & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M'' = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\ .$$

En effet, $M = M'E$ avec $E = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R})$, et $M' = M''F$ avec $F = \begin{pmatrix} I_p & B \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R})$. Donc $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(M'')$. Enfin, $\mathrm{rg}(M'') = \mathrm{rg}(I_p) + \mathrm{rg}(D)$, donc $\mathrm{rg}(M) = p + \mathrm{rg}(D)$.

31*. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$, avec $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A) \iff D = CA^{-1}B\ .$$

- -

Rappelons deux résultats utiles:

• On ne modifie pas le rang d'une matrice en la multipliant (à gauche ou à droite) par une matrice inversible. *C'est un résultat du cours.*

• Si une matrice M est diagonale par blocs : $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)$. *Ce n'est pas à proprement parler un résultat du cours, c'est assez évident intuitivement, mais c'est un peu pénible à rédiger en détail.*

La matrice $J = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ est inversible, donc le rang de M est aussi celui du produit $M' = JM = \begin{pmatrix} I_p & A^{-1}B \\ C & D \end{pmatrix}$. La matrice $K = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -C & I_q \end{pmatrix}$ est inversible, donc le rang de M' est aussi celui de $M'' = KM' = \begin{pmatrix} I_p & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$. Enfin, la matrice $L = \begin{pmatrix} I_p & -A^{-1}B \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ est inversible, donc le rang de M'' est aussi celui du produit $M''' = M''L = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$.

Au final, $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(M''') = \mathrm{rg}(I_p) + \mathrm{rg}(D - CA^{-1}B) = p + \mathrm{rg}(D - CA^{-1}B)$. Comme A est supposée inversible, $\mathrm{rg}(A) = p$, et on a bien

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A) \iff \mathrm{rg}(M) = p \iff \mathrm{rg}(D - CA^{-1}B) = 0 \iff D = CA^{-1}B\ .$$

Solution de Virginie DUPUY, PSI 2, 2015-2016: Notons d'abord que la matrice $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q,p}(\mathbb{R})$ est de rang p: en effet, son rang ne peut dépasser p puisqu'elle a p colonnes, et son rang vaut au moins p puisque, A étant inversible, ses p premières lignes sont indépendantes.

Notons $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_p$ les colonnes de cette matrice $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$, elles forment une famille libre de $\mathbb{R}^{p+q} \simeq \mathcal{M}_{p+q,1}(\mathbb{R})$. Notons maintenant $\Gamma'_1, \cdots, \Gamma'_q$ les colonnes de la matrice $\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q,q}(\mathbb{R})$. On a alors

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A) \quad \iff \quad \mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \iff \mathrm{rg}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_p, \Gamma'_1, \cdots, \Gamma'_q) = \mathrm{rg}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_p)$$

$$\iff \quad \forall j \in [\![1,q]\!] \qquad \Gamma'_j \in \mathrm{Vect}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_p)$$

Or, pour tout j, la condition $\Gamma'_j \in \mathrm{Vect}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_p)$ équivaut à l'existence d'un vecteur-colonne $X_j \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} X_j = \Gamma'_j$. La condition $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A)$ équivaut alors à l'existence d'une matrice $X \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, de colonnes $X_1, \cdots, X_q$, telle que $\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} X$, soit $\begin{cases} AX = B & \mathbf{(1)} \\ CX = D & \mathbf{(2)} \end{cases}$. Comme A est inversible, l'équation **(1)** est satisfaite si et seulement si $X = A^{-1}B$. Finalement,

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A) \iff \mathbf{(2)} \iff CA^{-1}B = D\ .$$

---

32. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n. Montrer l'équivalence entre

(a) : $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$

(b) : il existe $r \in [\![0,n]\!]$, $\mathcal{B}$ base de E et $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ tels que $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- -

Supposons d'abord **(b)**, notons $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ la base de E dans laquelle u est représenté par la matrice par blocs proposée. Comme A est supposée inversible de taille r, il est clair que $\mathrm{rg}(A) = r$, donc $\mathrm{rg}(u) = r$, puis que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_r)$, et aussi que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \cdots, e_n)$. On a bien $E = \mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Ker}\, u$.

Supposons maintenant **(a)**. Posons $r = \mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}\, u)$. Comme $\mathrm{Im}\, u$ et $\mathrm{Ker}\, u$ sont supplémentaires dans E, on peut construire une base de E en concaténant une base $(e_1, \cdots, e_r)$ de $\mathrm{Im}\, u$ et une base $(e_{r+1}, \cdots, e_n)$ de $\mathrm{Ker}\, u$. Comme $\mathrm{Im}\, u$ est stable par u, la matrice de u dans une telle base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)$ est bien de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. Enfin, la matrice A représente, dans la base $(e_1, \cdots, e_r)$, l'endomorphisme v de $\mathrm{Im}\, u$ induit par u. Cet endomorphisme v est en fait un automorphisme puisque $\mathrm{Ker}\, v = \mathrm{Ker}\, u \ \cap\ \mathrm{Im}\, u = \{0\}$, donc v est injectif puis bijectif (endomorphisme en dimension finie), on en déduit que la matrice A est inversible, ce qui démontre **(b)**.

Trace.

33.a. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe une matrice-colonne $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et une matrice-ligne $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ telles que $M = CL$. Réciproque ?

b. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, soit u un endomorphisme de E, de rang 1. Démontrer la relation $u \circ u = \mathrm{tr}(u) \cdot u$

- -

a. Méthode 1. Les colonnes $C_1, \cdots, C_n$ de la matrice A sont toutes colinéaires (ou "proportionnelles"), et une au moins d'entre elles, disons C_{j_0}, est non nulle. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, il existe alors un scalaire λ_j tel que $C_j = \lambda_j C_{j_0}$. On a alors $A = C_{j_0} L$, avec la matrice-ligne $L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$. *On a alors, bien sûr,* $\lambda_{j_0} = 1$.

Méthode 2. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à la matrice A, on a alors $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(A) = 1$, donc $\dim(\mathrm{Ker}\, u) = n-1$ par le théorème du rang. Soit alors $(e_1, \cdots, e_{n-1})$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$, on la complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n)$ de E. *Attention! On n'a pas forcément* $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$*, donc le vecteur* e_n *n'appartient pas nécessairement à* $\mathrm{Im}(u)$. Dans une telle base, l'endomorphisme u est représenté par une matrice de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$, i.e. les $n-1$ premières colonnes de M sont nulles. En posant $C' = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, on a $M = C' L'$ avec $L' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme A est semblable à M (elles représentent le même endomorphisme), on a $A = PMP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, donc $A = CL$, où $C = PC'$ est une matrice-colonne, et $L = L' P^{-1}$ est une matrice-ligne.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice représentant l'endomorphisme u dans une certaine base de E, alors $\mathrm{rg}(A) = 1$. En partant de l'écriture $A = CL$, on obtient

$$A^2 = (CL)\,(CL) = C\,(LC)\,L = (LC)\,(CL) = \mathrm{tr}(A) \cdot A\ .$$

En effet, $LC \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$ autrement dit c'est un scalaire ce qui permet de le faire commuter avec les autres matrices et, en posant $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} l_1 & \cdots & l_n \end{pmatrix}$, on observe que $A = CL = \begin{pmatrix} c_1 l_1 & \cdots & c_1 l_n \\ \vdots & & \vdots \\ c_n l_1 & \cdots & c_n l_n \end{pmatrix}$, alors que $LC = \sum_{i=1}^{n} c_i l_i = \mathrm{tr}(A)$. En traduisant en termes d'endomorphismes, on a bien $u^2 = \mathrm{tr}(u) \cdot u$.

Remarque. D'après la "méthode 2" de la question précédente, on peut aussi se placer dans une base de E dans laquelle l'endomorphisme u est représenté par une matrice de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$. On a alors $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(M) = a_n$, et on vérifie facilement que $M^2 = a_n\, M = \mathrm{tr}(M) \cdot M$.

---

34. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = AM$. Exprimer $\mathrm{tr}(\varphi)$ en fonction de $\mathrm{tr}(A)$.

- -

Une petite remarque sur la trace d'un endomorphisme φ d'un espace vectoriel E de dimension finie: si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une quelconque base de E, on a $\mathrm{tr}(\varphi) = \mathrm{tr}(M)$ avec $M = (m_{i,j}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Donc $\mathrm{tr}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$. Or, pour tout couple (i,j), le coefficient

$m_{i,j}$ est la i-ème coordonnée dans la base $\mathcal{B}$ du vecteur $\varphi(e_j)$. En introduisant les formes linéaires coordonnées $e_i^* : E \to \mathbb{K}$ relativement à la base $\mathcal{B}$, on a donc $m_{i,j} = e_i^*\big(\varphi(e_j)\big)$, puis $\operatorname{tr}(\varphi) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i^*\big(\varphi(e_i)\big)$.

Considérons la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée des matrices élémentaires $E_{i,j}$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n)$. On a donc pour cet exercice

$$\operatorname{tr}(\varphi) = \sum_{i,j} E_{i,j}^*\big(\varphi(E_{i,j})\big) = \sum_{i,j} \big(\varphi(E_{i,j})\big)_{i,j}$$

en convenant de noter aussi $(M)_{i,j}$ le coefficient d'indices (i,j) d'une matrice M. Or, si $A = (a_{k,l}) = \displaystyle\sum_{k,l} a_{k,l} E_{k,l}$, on calcule

$$\varphi(E_{i,j}) = AE_{i,j} = \sum_{k,l} a_{k,l} E_{k,l} E_{i,j} = \sum_{k,l} a_{k,l} \delta_{i,l} E_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} E_{k,j}\ .$$

Ainsi, $\big(\varphi(E_{i,j})\big)_{k,l} = \delta_{j,l} a_{k,i}$ et, plus particulièrement, $\big(\varphi(E_{i,j})\big)_{i,j} = a_{i,i}$. On conclut que

$$\operatorname{tr}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,i} = n \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = n \operatorname{tr}(A)\ .$$

---

35. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Discuter et résoudre l'équation $M = \operatorname{tr}(M)\, A + B$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- -

Notons **(E)** l'équation à résoudre, et notons $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses solutions.

On peut envisager plein de méthodes!!! Après quelques tâtonnements, celle qui me semble la plus rapide serait de dire que, si une matrice M vérifie **(E)**, elle est nécessairement de la forme $M = B + \lambda A$, où λ est un réel. Recherchons alors les solutions de **(E)** sous cette forme! En réinjectant,

$$\textbf{(E)} \iff B + \lambda A = \big(\operatorname{tr}(B) + \lambda \operatorname{tr}(A)\big) A + B \iff \Big(\big(1 - \operatorname{tr}(A)\big)\, \lambda - \operatorname{tr}(B)\Big)\, A = 0\ .$$

- si $A = 0$, cela n'impose aucune condition sur λ, et $\mathcal{S} = \{B\}$.

- si $A \neq 0$ et tr(A) $\neq 1$, cela impose $\lambda = \dfrac{\operatorname{tr}(B)}{1 - \operatorname{tr}(A)}$, donc $\mathcal{S} = \left\{B + \dfrac{\operatorname{tr}(B)}{1 - \operatorname{tr}(A)} A\right\}$ (l'équation **(E)** admet donc une solution unique ; remarquons aussi que le cas $A = 0$ peut se réintégrer dans ce cas).

- si tr(A) $= 1$ et $\operatorname{tr}(B) \neq 0$, alors $\mathcal{S} = \emptyset$, l'équation **(E)** est incompatible.

- si tr(A) $= 1$ et $\operatorname{tr}(B) = 0$, alors λ est quelconque, et $\mathcal{S} = \big\{B + \lambda A\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\big\}$. L'ensemble $\mathcal{S}$ est dans ce cas une “droite affine” (passant par B et dirigée par A).

Remarque. On peut remarquer que **(E)** est une équation linéaire: on peut l'écrire sous la forme $f(M) = B$, où $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie par $f(M) = M - \operatorname{tr}(M)\, A$, et il est clair que f est bien un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On obtient donc la solution générale en ajoutant une solution particulière (s'il en existe une!!!) à la solution générale de l'équation homogène associée **(E0)**.

Recherchons alors $\mathrm{Ker}(f)$, c'est-à-dire l'ensemble des solutions de **(E0)**. Si $M \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $M = \mathrm{tr}(M)A$, donc $M \in \mathrm{Vect}(A)$. On a donc l'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Vect}(A)$, où $\mathrm{Vect}(A)$ est une droite vectorielle sauf dans le cas particulier où A est la matrice nulle. Par ailleurs, $f(A) = \big(1 - \mathrm{tr}(A)\big)\, A$, on en déduit que:

- si $\mathrm{tr}(A) = 1$, alors $f(A) = 0$, donc $A \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(A)$ qui est une droite (alors $A \neq 0$);

- si $\mathrm{tr}(A) \neq 1$, alors $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ (valable aussi si $A = 0$).

Mais finalement, tout ceci ne sert pas à grand-chose!

Matrices semblables.

36.a. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit u un endomorphisme de E commutant avec tous les automorphismes de E :

$$\forall s \in \mathrm{GL}(E) \qquad s \circ u = u \circ s\ .$$

En utilisant des symétries vectorielles, montrer que, pour tout vecteur x de E, les vecteurs x et $u(x)$ sont colinéaires. En déduire que u est une homothétie.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que la seule matrice semblable à A soit la matrice A elle-même (on a $P^{-1}AP = A$ pour toute matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$). Montrer que A est une **matrice scalaire** ($A = \lambda I_n$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$).

- -

a. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec tous les automorphismes de E. Soient $x \in E \setminus \{0\}$, H un (hyperplan) supplémentaire de $\mathbb{K}x$ et s la symétrie par rapport à $\mathbb{K}x$ parallèlement à H. De $s \circ u = u \circ s$, on déduit que le vecteur $u(x)$ est invariant par s, donc colinéaire à x.

Pour tout $x \in E$ non nul, il existe donc un (unique) scalaire λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$. On va montrer que ce scalaire λ_x en fait ne dépend pas de x.
Soient x et y deux vecteurs non nuls de E. Montrons que $\lambda_x = \lambda_y$ en distinguant deux cas :

- Le couple (x, y) est libre. On écrit alors :

$$u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

et on en déduit $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.

- Le couple (x, y) est lié. Il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $y = \mu x$ (car $x \neq 0$) et on a :

$$\lambda_y y = u(y) = \mu u(x) = \mu \lambda_x x = \lambda_x y \ \text{ d'où } \ \lambda_x = \lambda_y \ \ (\text{car} \ \ y \neq 0)\ .$$

On a finalement prouvé $\quad \exists \lambda \in \mathbb{K}\ \ \forall x \in E \quad u(x) = \lambda x$, ce qui signifie que $u = \lambda \mathrm{Id}_E$: u est une homothétie.

b. On a $PA = AP$ pour toute matrice inversible P, ce qui traduit exactement que l'endomorphisme u de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A commute avec tous les automorphismes de $\mathbb{K}^n$, donc est une homothétie d'après la question **a.**, d'où A est une matrice scalaire.

---

37. Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 5 \\ 14 & -12 & 10 \\ 7 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. En déduire la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{E} = \Big\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA \Big\}$.

- -

a. On observe que la matrice A est de rang 1, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui lui est canoniquement associé admet pour image la droite vectorielle $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(u)$, avec $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$: *en effet, l'image d'un endomorphisme est le sous-espace engendré par les vecteurs-colonnes.* Le noyau $\operatorname{Ker} f$ est le plan vectoriel d'équation $7x - 6y + 5z = 0$. Notons que le vecteur u vérifie cette équation, d'où l'inclusion $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.

La matrice A représente l'endomorphisme f dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Montrer que A est semblable à B revient à montrer l'existence d'une autre base (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle le même endomorphisme f est représenté par la matrice B, ce qui revient à dire que l'on doit avoir $f(u) = f(v) = 0_E$ et $f(w) = u$. Si une telle base existe, on doit avoir $u \in \operatorname{Im} f$, choisissons donc pour u le vecteur déjà proposé ci-dessus, à savoir $u = e_1 + 2e_2 + e_3$. Ensuite, w doit être un antécédent de u par f, d'où le choix possible de $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 + e_2$. Enfin, v doit être un vecteur de $\operatorname{Ker} f$ non colinéaire à u, par exemple $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = 6e_1 + 7e_2$. Il est immédiat de vérifier que ces trois vecteurs u, v, w sont linéairement indépendants, donc constituent une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, et que l'on a bien $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = B$, ce qui prouve que les matrices A et $B = E_{1,3}$ sont semblables puisqu'elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

b. L'ensemble $\mathcal{E}$ est ce que l'on appelle le **commutant** de la matrice A, il est immédiat qu'il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Il est plus facile de déterminer le commutant de la matrice B, à savoir l'ensemble

$$\mathcal{C}_B = \big\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MB \big\} .$$

En effet, il est facile de voir qu'une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ commute avec B si et seulement si on a $d = g = h = 0$ et $a = i$, autrement dit si M est de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec a, b, c, e, f cinq réels arbitraires. Ainsi, $\mathcal{C}_B$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de dimension 5 : une base est $(E_{1,1}{+}E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. D'autre part, on a $A = PBP^{-1}$, où P est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ construite ci-dessus. On vérifie alors que

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_A &\iff AM = MA \\ &\iff PBP^{-1}M = MPBP^{-1} \\ &\iff BP^{-1}MP = P^{-1}MPB \\ &\iff P^{-1}MP \in \mathcal{C}_B \end{aligned}$$

ou encore $N \in \mathcal{C}_B \iff PNP^{-1} \in \mathcal{C}_A$. Donc $\mathcal{C}_A$ est l'image de $\mathcal{C}_B$ par l'application $\varphi : N \mapsto PNP^{-1}$. Il est facile de vérifier que $\varphi : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est linéaire et bijective, c'est donc un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, elle conserve les dimensions, on a donc $\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{C}_A = \dim(\mathcal{C}_B) = 5$.

---

38. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^{n-1} \neq 0_n$ et $A^n = 0_n$.

Montrer que A est semblable à la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$.

- -

Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement représenté par la matrice A, on a alors $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. Il existe donc un vecteur x de E tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Soit la famille $\mathcal{B} = \big(u^{n-1}(x), u^{n-2}(x), \cdots, u(x), x\big)$. Montrons que cette famille est libre:

Soient λ_0, $\cdots$, λ_{n-1} des scalaires vérifiant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E$. Si ces scalaires étaient non tous nuls, on pourrait considérer l'entier $p = \min\Big(\big\{k \in [\![0, n-1]\!] \mid \lambda_k \neq 0\big\}\Big)$, on aurait alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E$. En appliquant u^{n-1-p}, on obtient $\lambda_p u^{n-1}(x) = 0_E$ et, comme le vecteur $u^{n-1}(x)$ est non nul, il reste $\lambda_p = 0$, ce qui contredit la définition de l'entier p. Ce raisonnement par l'absurde montre que les coefficients λ_k sont tous nuls, et donc que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

Comme $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = \dim(E) = n$, la famille $\mathcal{B}$ est une base de E, il est alors immédiat que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = N$, et comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = A$, les matrices A et N sont semblables.

39*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont nuls. *On pourra raisonner par récurrence sur n*

- -

On procède par récurrence sur n.

C'est évident pour $n = 1$ puisqu'alors la seule matrice de trace nulle est la matrice nulle.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons la propriété établie au rang n. Soit alors $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ de trace nulle, soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^{n+1})$ l'endomorphisme canoniquement associé. Donc $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$, où $\mathcal{B}_0$ est la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$.

Si A est une matrice scalaire, i.e. s'il existe λ scalaire tel que $A = \lambda I_n$, alors $0 = \mathrm{tr}(A) = n\lambda$, donc $A = 0_n$ et c'est terminé.

Sinon, il existe un vecteur x de $\mathbb{K}^{n+1}$ tel que $f(x)$ ne soit pas colinéaire à x (*exercice classique: si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que, pour tout vecteur x, $u(x)$ est colinéaire à x, alors u est une homothétie. La preuve en est laissée au lecteur*). La famille $\big(x, f(x)\big)$ étant alors libre, on peut la compléter en une base $\mathcal{B} = \big(x, f(x), e_3, \cdots, e_{n+1}\big)$ de $\mathbb{K}^{n+1}$. La matrice A est alors semblable à la matrice $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, qui est de la forme $A' = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & B \end{pmatrix}$ avec $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ matrice-ligne, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ matrice-colonne dont le premier coefficient vaut 1, et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Enfin, $0 = \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A') = \mathrm{tr}(B)$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à la matrice B: elle s'écrit sous la forme $B = PB'P^{-1}$, où $B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a tous ses coefficients diagonaux nuls, et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Posons $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & P \end{pmatrix}$. Alors $Q \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ et la matrice $A'' = Q^{-1}A'Q$ est semblable à A' donc à A, et on vérifie que $A'' = \begin{pmatrix} 0 & LP \\ P^{-1}C & B' \end{pmatrix}$, donc les coefficients diagonaux de la matrice A'' sont nuls.

---

40. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $A^2 = 0_n$ et $\mathrm{rg}(A) = k$. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- -

Soit u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A. Si l'on construit une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle u est représenté par la matrice B, cela répond à la question. On a $\mathrm{rg}(u) = k$ et $u^2 = 0$, ce que l'on peut traduire par $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

Soit $(e_1, \cdots, e_k)$ une base de $\mathrm{Im}(u)$. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, soit e_{n-k+i} un antécédent de e_i par u, i.e. $u(e_{n-k+i}) = e_i$. D'autre part, on a $n - k \geq k$ puisque $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$, et la famille libre $(e_1, \cdots, e_k)$ peut être complétée en une base $(e_1, \cdots, e_k, e_{k+1}, \cdots, e_{n-k})$ de $\mathrm{Ker}(u)$.

La famille $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_k, e_{k+1}, \cdots, e_{n-k}, e_{n-k+1}, \cdots, e_n)$ est une base de E: en effet, elle est de cardinal $n = \dim(E)$ et, si λ_1, $\cdots$, λ_n sont des réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$, en appliquant u, il vient $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_{n-k+i} e_i = 0_E$, donc les scalaires λ_{n-k+1}, $\cdots$, λ_n sont nuls puisque la famille $(e_1, \cdots, e_k)$ est libre. Il reste alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i e_i = 0_E$, donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-k} = 0$ puisque la famille $(e_1, \cdots, e_k, e_{k+1}, \cdots, e_{n-k})$ est libre aussi. Finalement, tous les scalaires sont nuls.

Il est alors immédiat que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = B = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Formes linéaires et hyperplans.

41. Soit E un espace vectoriel de dimension n, soit F un sous-espace de dimension p avec $p < n$. Montrer que l'on peut écrire F comme une intersection de $n-p$ hyperplans de E. Est-il possible d'écrire F comme une intersection de k hyperplans de E avec $k < n-p$?

- -

• Soit $(e_1, \cdots, e_p, e_{p+1}, \cdots, e_n)$ une base de E adaptée à F. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, soit φ_k la k-ème forme linéaire coordonnée sur E relativement à la base $\mathcal{B}$, i.e. l'application de E vers $\mathbb{K}$ qui, à tout vecteur x se décomposant en $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ dans la base $\mathcal{B}$, associe sa k-ème coordonnée x_k. Chaque φ_k est une forme linéaire sur E, non nulle puisque $\varphi_k(e_k) = 1$. Les sous-espaces $H_k = \mathrm{Ker}(\varphi_k)$ sont donc des hyperplans de E. Et $F = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p) = H_{p+1} \cap \cdots \cap H_n$ est une intersection de $n-p$ hyperplans.

• La réponse est non: en effet, une intersection de k hyperplans est de dimension au moins $n-k$, on le montre par récurrence (finie) sur k.

- pour $k = 1$, un hyperplan est de dimension $n-1$;

- soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, supposons prouvé que toute intersection de k hyperplans est de dimension au moins $n-k$, soit $F = H_1 \cap \cdots \cap H_k \cap H_{k+1}$ une intersection de $k+1$ hyperplans. Posons $G = H_1 \cap \cdots \cap H_k$, alors $\dim(G) \geq n-k$ d'après l'hypothèse de récurrence, et $F = G \cap H_{k+1}$. Par la formule de Grassmann,

$$\dim(F) = \dim(G) + \dim(H_{k+1}) - \dim(G + H_{k+1}) \geq (n-k) + (n-1) - n = n - (k+1) \ ,$$

ce qui achève la récurrence. *On a utilisé le fait que $G + H_{k+1}$ est un s.e.v. de E, donc sa dimension est majorée par n.*

---

42. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculer $\mathrm{tr}(AE_{i,j})$, où $E_{i,j}$ est une matrice élémentaire (tous les coefficients nuls sauf celui en position (i,j) qui vaut 1). Montrer que toute forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de la forme $\tau_A : M \mapsto \mathrm{tr}(AM)$, où A est une matrice fixée. *On montrera pour cela que l'application $A \mapsto \tau_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\big)$.*

- -

Pour tout couple $(k,l) \in [\![1, n]\!]$, le coefficient d'indices (l,k) de la matrice élémentaire $E_{i,j}$ est $\delta_{i,l}\delta_{j,k}$, où δ représente le symbole de Kronecker. Calculons les coefficients diagonaux de la matrice-produit $AE_{i,j}$:

$$\begin{aligned}
\big(AE_{i,j}\big)_{k,k} &= \sum_{l=1}^{n} a_{k,l}\,(E_{i,j})_{l,k} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \delta_{i,l}\,\delta_{j,k}\,a_{k,l} \\
&= \delta_{j,k} \sum_{l=1}^{n} \delta_{i,l}\,a_{k,l} \ = \ \delta_{j,k}\,a_{k,i} \ .
\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{tr}(AE_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{j,k}\, a_{k,i} = a_{j,i}$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notons τ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}$ qui, à toute matrice M, associe le scalaire $\tau_A(M) = \operatorname{tr}(AM)$. Cette application est linéaire (*conséquence de la linéarité de la trace*), c'est donc une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, autrement dit un élément de l'espace vectoriel $F = \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\big)$. De plus, l'application $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to F$, $A \mapsto \tau_A$ est aussi linéaire: en effet, $\tau_{\lambda A+\mu B} = \lambda\, \tau_A + \mu\, \tau_B$ puisque, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\tau_{\lambda A+\mu B}(M) = \operatorname{tr}\big((\lambda A + \mu B)M\big) = \lambda \operatorname{tr}(AM) + \mu \operatorname{tr}(BM) = \lambda\, \tau_A(M) + \mu\, \tau_B(M)\ .$$

Mais T est injective puisque, si $A \in \operatorname{Ker}(T)$, on a $\tau_A = 0$, donc pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(AM) = 0$ et en particulier $\operatorname{tr}(AE_{i,j}) = 0$ pour tout couple (i,j), donc $a_{j,i} = 0$ pour tout couple (i,j) d'après le calcul fait plus haut, ainsi tous les coefficients de la matrice A sont nuls et $A = 0$.

Enfin, les espaces vectoriels de départ et d'arrivée de l'application linéaire T ont la même dimension n^2, donc T est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, T est surjective, et cela répond à la question posée.

---

43. Soit E un espace vectoriel de dimension 3, soit u un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in E$ et une forme linéaire φ sur E tels que

$$\forall x \in E \qquad u(x) = \varphi(x)\, a\ .$$

- -

La relation $u \circ u = 0$ se traduit par l'inclusion $\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(u)$. En posant $r = \operatorname{rg}(u)$, on a alors $r \leq 3 - r$, ce qui entraîne $r \leq 1$.

Si $r = 0$, alors $u = 0$, et la conclusion est vraie avec $a = 0_E$ et $\varphi = 0$ par exemple.

Si $r = 1$, alors $\operatorname{Im}(u)$ est une droite vectorielle, notons a un vecteur directeur de cette droite: $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}(a)$. Pour tout x de E, il existe alors un unique scalaire $\varphi(x)$ tel que $u(x) = \varphi(x)\, a$, ce qui détermine déjà une application φ de E vers $\mathbb{K}$. Ensuite, la linéarité de u entraîne la linéarité de φ, il suffit de l'écrire!

44.a. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (A,B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)^2 \qquad \varphi(AB) = \varphi(BA)\ .$$

Montrer qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \operatorname{tr}$.

b. Soit f un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $f(I_n) = I_n$ et

$$\forall (A,B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)^2 \qquad f(AB) = f(BA)\ .$$

Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\operatorname{tr}\big(f(M)\big) = \operatorname{tr}(M)$.

- -

a. Utilisons les matrices élémentaires $E_{i,j}$ qui constituent la base canonique de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On se rappelle la "règle des dominos": $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.

Si $i \neq j$, alors $\varphi(E_{i,j}) = \varphi(E_{i,i}E_{i,j}) = \varphi(E_{i,j}E_{i,i}) = \varphi(0_n) = 0$.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\varphi(E_{i,i}) = \varphi(E_{i,1}E_{1,i}) = \varphi(E_{1,i}E_{i,1}) = \varphi(E_{1,1})$.

Posons maintenant $\lambda = \varphi(E_{1,1})$, c'est un scalaire. Si $M = (m_{i,j})$ est une quelconque matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on la décompose dans la base canonique: $M = \sum_{i,j} m_{i,j}E_{i,j}$, i.e. $M = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}E_{i,j}$. Par linéarité de φ, les $\varphi(E_{i,j})$ étant nuls lorsque $i \neq j$, on a

$$\varphi(M) = \sum_{i,j} m_{i,j}\ \varphi(E_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}\ \varphi(E_{i,i}) = \Big(\sum_{i=1}^{n} m_{i,i}\Big)\ \lambda = \lambda\,\mathrm{tr}(M)\ .$$

On a prouvé que $\varphi = \lambda\,\mathrm{tr}$.

b. De façon analogue, si l'endomorphisme f vérifie l'hypothèse énoncée,
si $i \neq j$, alors $f(E_{i,j}) = f(E_{i,i}E_{i,j}) = f(E_{i,j}E_{i,i}) = f(0_n) = 0$, et
pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $f(E_{i,i}) = f(E_{i,1}E_{1,i}) = f(E_{1,i}E_{i,1}) = f(E_{1,1})$.
Mais, par linéarité de f,

$$f(I_n) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} E_{i,i}\Big) = \sum_{i=1}^{n} f(E_{i,i}) = \sum_{i=1}^{n} f(E_{1,1}) = n\,f(E_{1,1})\ ,$$

donc $f(E_{1,1}) = \dfrac{1}{n}\,f(I_n) = \dfrac{1}{n}\,I_n$.

Ensuite, si $M = (m_{i,j}) = \sum_{i,j} m_{i,j}E_{i,j}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a, par linéarité de f, les $f(E_{i,j})$ étant nuls lorsque $i \neq j$,

$$\textbf{(*)}: \qquad f(M) = \sum_{i,j} m_{i,j}\ f(E_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}\ f(E_{i,i}) = \Big(\sum_{i=1}^{n} m_{i,i}\Big)\cdot\frac{1}{n}I_n = \frac{\mathrm{tr}(M)}{n}\ I_n\ .$$

On en déduit que $\mathrm{Tr}\big(f(M)\big) = \dfrac{\mathrm{tr}(M)}{n}\,\mathrm{tr}(I_n) = \mathrm{tr}(M)$.

Remarque. En fait, cet exercice est chelou! La relation **(*)** obtenue plus haut montre qu'il existe en fait un et un seul endomorphisme f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant les conditions imposées, il est défini par $f(M) = \dfrac{\mathrm{tr}(M)}{n}\ I_n$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On en déduit que $f\big(f(M)\big) = M$ pour tout M, donc cet endomorphisme f est un projecteur, c'est plus précisément le projecteur sur la droite $D = \mathrm{Vect}(I_n) = \mathrm{Im}(f)$ parallèlement à l'hyperplan H constitué des matrices de trace nulle:

$$H = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) = \big\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\big\}\ .$$

45*.a. Soient $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ et ψ des formes linéaires sur un espace vectoriel E quelconque. Prouver l'équivalence

$$\psi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) \iff \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_k) \subset \mathrm{Ker}(\psi)\ .$$

On pourra considérer $\Phi : E \to \mathbb{K}^{n+1}$, $x \mapsto \Phi(x) = \big(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x), \psi(x)\big)$.

b. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, soit $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ une famille finie de formes linéaires sur E de rang r, montrer que le sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_0 = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$ de E est de dimension $p - r$ (*on pourra procéder par récurrence sur* n):

$$\textbf{(*)} : \qquad \dim\Big(\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_k)\Big) = \dim(E) - \mathrm{rg}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)\ .$$

- -

a. L'implication directe est évidente.

Supposons donc $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_k) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$. Considérons l'application linéaire

$$\begin{cases} \Phi\ :\ E & \to \mathbb{K}^{n+1} \\ \quad\ \ x & \mapsto \big(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x), \psi(x)\big) \end{cases}.$$

Alors Φ n'est pas surjective puisque $e_{n+1} = (0, \cdots, 0, 1) \notin \mathrm{Im}(\Phi)$. Le sous-espace $\mathrm{Im}(\Phi)$ de $\mathbb{K}^{n+1}$ est alors inclus dans un hyperplan H ne contenant pas e_{n+1} (*soit* s *le rang de* Φ, *soit* $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_s)$ *une base de* $\mathrm{Im}(\Phi)$, *on complète la famille libre* $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_s, e_{n+1})$ *en une base* $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_s, \varepsilon_{s+1}, \cdots, \varepsilon_n, e_{n+1})$ *de* $\mathbb{K}^{n+1}$,*et alors* $H = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_s, \varepsilon_{s+1}, \cdots, \varepsilon_n)$ *fera l'affaire*). Un tel hyperplan admet (dans la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$) une équation cartésienne de la forme $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_{n+1}x_{n+1} = 0$ avec $a_{n+1} \neq 0$ puisque $e_{n+1} \notin H$. L'inclusion $\mathrm{Im}(\Phi) \subset H$ se traduit par $a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x) + a_{n+1}\psi(x) = 0$ pour tout $x \in E$, d'où la relation $\psi = -\dfrac{1}{a_{n+1}}\,(a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n)$, donc $\psi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$.

b. Par récurrence sur n.

• Pour $n = 1$:

- si $\varphi_1 = 0$, alors $\mathrm{rg}\,\big((\varphi_1)\big) = 0$ et $\mathrm{Ker}(\varphi_1) = E$ est de dimension p ;

- si $\varphi_1 \neq 0$, alors $\mathrm{rg}\,\big((\varphi_1)\big) = 1$ et $\mathrm{Ker}(\varphi_1)$ est un hyperplan.

Dans les deux cas, la relation **(*)** est satisfaite.

• Supposons la relation **(*)** satisfaite pour toute famille de n formes linéaires sur E.

Soit $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n, \varphi_{n+1})$ une famille de $n{+}1$ formes linéaires sur E. Posons $r = \mathrm{rg}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$, alors le sous-espace $V = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$ est de dimension $p - r$.

- si $\varphi_{n+1} \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$, alors la famille $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n, \varphi_{n+1})$ est aussi de rang r, et $V \subset \mathrm{Ker}(\varphi_{n+1})$, donc $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n+1} \mathrm{Ker}(\varphi_k) = V \cap \mathrm{Ker}(\varphi_{n+1}) = V$ est toujours de dimension $p - r$.

- si $\varphi_{n+1} \notin \mathrm{Vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$, alors par la question **a.**, V n'est pas inclus dans $\mathrm{Ker}(\varphi_{n+1})$, et $\bigcap_{k=1}^{n+1} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$ est alors un sous-espace strict de V, donc de dimension au plus $p-r-1$. Mais on a aussi, par la formule de Grassmann,

$$\dim\Big(\bigcap_{k=1}^{n+1} \mathrm{Ker}(\varphi_k)\Big) = \dim(V) + \dim\big(\mathrm{Ker}(\varphi_{n+1})\big) - \dim\big(V + \mathrm{Ker}(\varphi_{n+1})\big)$$

et $V + \mathrm{Ker}(\varphi_{n+1})$ est de dimension au plus p puisque c'est un sous-espace de E, on en déduit

$$\dim\Big(\bigcap_{k=1}^{n+1} \mathrm{Ker}(\varphi_k)\Big) \geq (p-r) + (p-1) - p = p-r-1\ ,$$

donc $\dim\Big(\bigcap_{k=1}^{n+1} \mathrm{Ker}(\varphi_k)\Big) = p-(r+1)$.

Dans les deux cas, la relation **(*)** est encore satisfaite.

46.a. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe une matrice élémentaire $E_{i,j}$, avec $i \neq j$, telle que $\varphi(E_{i,j}) \neq 0$. Montrer qu'il existe un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi(I_n + \alpha E_{i,j}) = 0$.

b. En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient au moins une matrice inversible.

- -

a. Par linéarité, $\varphi(I_n + \alpha E_{i,j}) = \varphi(I_n) + \alpha\,\varphi(E_{i,j})$ est nul pour $\alpha = -\dfrac{\varphi(I_n)}{\varphi(E_{i,j})}$.

b. Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe alors une forme linéaire non nulle φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

• Si $\varphi(E_{i,j}) = 0$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, alors les matrices élémentaires $E_{i,j}$, avec $i \neq j$, sont toutes dans H, donc leur somme $M = \sum_{i\neq j} E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ appartient à H. Mais cette matrice M est inversible. En effet, on peut écrire $M = J - I_n$, où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1. Des relations $J^2 = nJ$ et $J = M + I_n$, on tire $(M+I_n)^2 = n\,(M+I_n)$, puis $M^2 + (2-n)M + (1-n)I_n = 0$, ce qui montre que M est inversible avec $M^{-1} = \dfrac{1}{n-1}\big(M + (2-n)I_n\big)$.

• S'il existe un couple (i_0, j_0) avec $i_0 \neq j_0$ tel que $\varphi(E_{i_0,j_0}) \neq 0$, alors il existe un scalaire α tel que $\varphi(I_n + \alpha E_{i_0,j_0}) = 0$, i.e. tel que $I_n + \alpha E_{i_0,j_0} \in H$ d'après **a.** Or, la matrice $I_n + \alpha E_{i_0,j_0}$ est inversible puisque $(I_n + \alpha E_{i_0,j_0})(I_n - \alpha E_{i_0,j_0}) = I_n$.

Bilan. Dans les deux cas, on a trouvé une matrice inversible appartenant à l'hyperplan H.

Polynômes d'endomorphismes et de matrices.

47. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier $A^2 - 4A - 5I_3 = 0$.

Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 4X - 5$.

En déduire A^n pour n entier naturel, ainsi que A^{-1}.

- -

On vérifie la relation $A^2 - 4A - 5I_3 = 0$. On dispose donc du polynôme annulateur $P = X^2 - 4X - 5 = (X+1)(X-5)$ pour la matrice A.

Le reste R_n de la division euclidienne de X^n par P est un polynôme de degré strictement inférieur à 2, il est donc de la forme $R_n = a_n X + b_n$: on écrit alors l'identité de la division euclidienne sous la forme

$$X^n = (X^2 - 4X - 5)\, Q(X) + a_n X + b_n\ . \qquad \textbf{(*)}$$

En évaluant l'identité **(*)** pour $X = 5$ et $X = -1$ (racines de P), on obtient les deux équations

$$\begin{cases} -a_n + b_n = (-1)^n \\ 5a_n + b_n = 5^n \end{cases}, \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} a_n = \dfrac{5^n - (-1)^n}{6} \\ b_n = \dfrac{5^n + 5 \times (-1)^n}{6} \end{cases}.$$

En substituant la matrice A à l'indéterminée X dans la relation **(*)**, et tenant compte de $P(A) = A^2 - 4A - 5I_3 = 0$, on obtient

$$A^n = R_n(A) = a_n A + b_n I_3 = \frac{5^n - (-1)^n}{6}\, A + \frac{5^n + 5 \times (-1)^n}{6}\, I_3$$

ou, sous forme de tableau matriciel, et après quelques simplifications :

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2 \times (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2 \times (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2 \times (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Enfin, la relation $A^2 - 4A - 5I_3 = 0$ se réécrit $A \cdot \left[\dfrac{1}{5}(A - 4I_3)\right] = I_3$, donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{5}(A - 4I_3) = \dfrac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

---

48. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe un polynôme P non constant tel que $P(0) \neq 0$, vérifiant $AB = P(A)$. Montrer que la matrice A est inversible. Montrer que les matrices A et B commutent.

- -

Posons $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d$, avec $d \in \mathbb{N}^*$ et $a_d \neq 0$ (P est non constant), $a_0 \neq 0$ ($P(0) \neq 0$). La relation $AB = P(A)$ s'écrit

$$AB = a_0I_n + a_1A + \cdots + a_dA^d \ ,$$

soit encore $I_n = \left[\dfrac{1}{a_0}\left(B - a_1I_n - a_2A - \cdots - a_dA^{d-1}\right)\right] \cdot A$, donc A est inversible avec

$$A^{-1} = \frac{1}{a_0}\left(B - a_1I_n - a_2A - \cdots - a_dA^{d-1}\right) = \frac{1}{a_0}\left(B - \sum_{k=0}^{d-1} a_{k+1}A^k\right) .$$

On peut alors écrire

$$B = a_0\, A^{-1} + \sum_{k=0}^{d-1} a_{k+1}A^k = a_0A^{-1} + Q(A) \ ,$$

où Q est un polynôme. Or, A commute avec son inverse A^{-1}, et commute aussi avec $Q(A)$ qui est "un polynôme de A", donc elle commute avec B qui est une combinaison linéaire des deux. Donc $BA = AB = P(A)$.

---

49. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit u un endomorphisme de E. On suppose que u admet un polynôme annulateur P tel que $P(X) = X\,Q(X)$ avec $Q(0) \neq 0$. Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

- -

Posons $Q = a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m$, avec $a_0 = Q(0) \neq 0$ et $a_m \neq 0$, et procédons par analyse-synthèse.

Analyse : Soit $x \in E$, supposons $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Ker} u$ et $z \in \operatorname{Im} u$: il existe donc $t \in E$ tel que $z = u(t)$. Appliquons alors l'endomorphisme $Q(u)$:

$$\begin{aligned} Q(u)(x) &= Q(u)(y) + Q(u)(z) \\ &= a_0\, y + a_1\, u(y) + \cdots + a_m\, u^m(y) + \big(Q(u) \circ u\big)(t) \\ &= a_0\, y + P(u)(t) \\ &= a_0\, y \end{aligned}$$

car $y \in \operatorname{Ker} u$, et $P(u) = u \circ Q(u) = Q(u) \circ u$ est l'endomorphisme nul. On a donc nécessairement $y = \dfrac{1}{a_0}\, Q(u)(x)$ et $z = x - \dfrac{1}{a_0}\, Q(u)(x)$, ce qui garantit l'unicité de la décomposition.

Synthèse : Soit $x \in E$, posons $y = \dfrac{1}{a_0}\, Q(u)(x)$ et $z = x - \dfrac{1}{a_0}\, Q(u)(x)$. On a bien $x = y + z$. Par ailleurs

$$u(y) = \frac{1}{a_0}\,\big(u \circ Q(u)\big)(x) = \frac{1}{a_0}\, P(u)(x) = 0_E \ ,$$

donc $y \in \operatorname{Ker} u$. Enfin,

$$z = x - \frac{1}{a_0}\,\big(a_0\, x + a_1\, u(x) + \cdots + a_m\, u^m(x)\big) = -\frac{1}{a_0}\,\big(a_1\, u(x) + \cdots + a_m\, u^m(x)\big) \in \operatorname{Im} u \ ,$$

ce qui garantit l'existence de la décomposition.

---

50. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exprimer simplement $P(aI_n + J)$, pour $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.

- -

La formule de Taylor polynomiale permet d'écrire

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}\,(X-a)^k\ ,$$

cette somme étant nécessairement finie puisque les termes pour $k > \deg(P)$ sont nuls. En substituant à l'indéterminée X la matrice $aI_n + J$, on obtient

$$P(aI_n + J) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}\,J^k\ ,$$

il ne reste donc plus qu'à calculer les matrices J^k pour $k \in \mathbb{N}$. Le lecteur insatiable s'assurera que les puissances successives de J s'obtiennent en décalant à chaque fois d'un rang vers la droite la diagonale de 1, jusqu'à $J^{n-1} = E_{1,n}$ (matrice-élément), puis $J^n = 0_n$ et évidemment $J^k = 0_n$ pour tout $k \geq n$. Ainsi,

$$P(aI_n + J) = \begin{pmatrix} P(a) & P'(a) & \dfrac{P''(a)}{2!} & \cdots & \dfrac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \dfrac{P''(a)}{2!} \\ & (0) & & \ddots & P'(a) \\ & & & & P(a) \end{pmatrix}$$

---

51. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $f(M) = M + \mathrm{tr}(M)\, I_n$ pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b. Déterminer le noyau de f, son rang. L'endomorphisme f est-il bijectif ?

c. Prouver la relation $f^2 - (n+2)\, f + (n+1)\ \mathrm{id} = 0$.

d. Déterminer la réciproque f^{-1} de f.

- -

a. Facile (résulte de la linéarité de la trace).

b. Notons que, si une matrice M appartient au noyau de f, alors M est colinéaire à I_n, on en déduit l'inclusion $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Vect}(I_n)$. Par ailleurs, $f(I_n) = (n+1)\, I_n \neq 0_n$. On en déduit que $\mathrm{Ker}\, f = \{0_n\}$, donc f est injectif, donc bijectif (dimension finie), c'est un automorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors bien sûr, $\mathrm{rg}(f) = \dim(E) = n^2$.

c. On calcule

$$\begin{aligned} f^2(M) &= f\big(M+\mathrm{tr}(M)\,I_n\big) \\ &= f(M)+\mathrm{tr}(M)\,f(I_n) \qquad \text{par linéarité de } f \\ &= M+\mathrm{tr}(M)\,I_n+(n+1)\,\mathrm{tr}(M)\,I_n \\ &= M+(n+2)\,\mathrm{tr}(M)\,I_n \\ &= (n+2)\,\big(M+\mathrm{tr}(M)\,I_n\big)-(n+1)\,M \\ &= (n+2)\,f(M)-(n+1)\,M\ . \end{aligned}$$

On a bien obtenu la relation $f^2-(n+2)\,f+(n+1)\ \mathrm{id}=0$. Dit autrement, on a obtenu un polynôme annulateur de degré 2.

d. La relation ci-dessus peut s'écrire $f\circ\big(f-(n+2)\ \mathrm{id}\big)=-(n+1)\ \mathrm{id}$, et ces deux endomorphismes commutent, on en déduit que $f^{-1}=\dfrac{1}{n+1}\,\big((n+2)\ \mathrm{id}-f\big)$, ce qui peut s'écrire $f^{-1}(M)=M-\dfrac{\mathrm{tr}(M)}{n+1}\,I_n$ pour toute matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

---

52. Soit $N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, soit $A=I_n+N$. On admettra que $N^n=0_n$.

a. Montrer que $t\mapsto\sqrt{1+t}$ admet un développement limité à l'ordre $n-1$ au voisinage de 0, on le notera

$$\sqrt{1+t}=a_0+a_1t+\cdots+a_{n-1}t^{n-1}+o(t^{n-1})\ .$$

b. Soit le polynôme $R=1+X-(a_0+a_1X+a_{n-1}X^{n-1})^2$. Montrer que le polynôme R est divisible par X^n, c'est-à-dire que l'on peut écrire $R(X)=X^n\,Q(X)$, où $Q\in\mathbb{R}[X]$ est un polynôme.

c. Montrer qu'il existe au moins une matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2=A$.

d. Chercher M lorque $n=3$ et $N=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

- -

Remarque. Le fait que $N^n=0_n$ est classique et peut se démontrer comme suit: si on appelle p l'indice de nilpotence de la matrice N, c'est-à-dire le plus petit entier k pour lequel $N^k=0_n$, on a alors $N^{p-1}\neq 0_n$ et $N^p=0_n$, et il existe un vecteur $X_0\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\simeq\mathbb{R}^n$ tel que $N^{p-1}X_0\neq 0$, on montre alors que la famille de vecteurs $\big(X_0,NX_0,\cdots,N^{p-1}X_0\big)$ est libre dans $\mathbb{R}^n$ et, comme elle est de cardinal p, cela entraîne $p\leq n$, donc $N^n=0_n$.

a. La fonction $f\ :\ t\mapsto\sqrt{1+t}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ donc, d'après la formule de Taylor-Young, admet un développement limité à tout ordre au voisinage de zéro.

Remarque. On a $a_0=1$ et, pour $k\geq 1$,

$$a_k=\frac{1}{k!}\ \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}-1\Big)\Big(\frac{1}{2}-3\Big)\cdots\Big(\frac{1}{2}-k+1\Big)=\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\,1\times 3\times\cdots\times(2k-3)=\frac{(-1)^{k-1}\,(2k-2)!}{2^{2k-1}\,k!\,(k-1)!}\ .$$

b. Le cours de “Sup” nous dit que, si deux fonctions u et v admettent au voisinage de 0 des développements limités à l'ordre $n-1$ s'écrivant respectivement $u(t)=U(t)+o(t^{n-1})$

et $v(t) = V(t) + o(t^{n-1})$ avec U et V deux polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (ce sont les "parties régulières" de ces développements limités), alors la fonction produit uv admet un DL à l'ordre $n-1$ dont la partie régulière W est le polynôme UV tronqué à l'ordre $n-1$ (on ne conserve que les termes de degré inférieur ou égal à $n-1$). Soit alors le polynôme $F = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$ (partie régulière du DL à l'ordre $n-1$ de $f : t \mapsto \sqrt{1+t}$), la partie régulière du DL à l'ordre $n-1$ de $f^2 : t \mapsto 1+t$ est alors le polynôme F^2 tronqué à l'ordre $n-1$, mais cette partie régulière est aussi évidemment le polynôme $1+X$. Cela signifie que le polynôme différence $1+X-F^2$ ne comporte que des termes de degré supérieur ou égal à n, ce qu'il fallait démontrer.

c. Posons $M = F(N) = a_0\, I_n + a_1\, N + \cdots + a_{n-1} N^{n-1}$, alors $R(N) = N^n\, Q(N) = 0_n$ et aussi

$$0_n = R(N) = I_n + N - (a_0\, I_n + a_1\, N + \cdots + a_{n-1} N^{n-1})^2 = A - F(N)^2 = A - M^2 \ ,$$

on a donc montré l'existence d'au moins une racine carrée de la matrice $A = I_n + N$.

d. Dans cet exemple, $n = 3$, la partie régulière du DL de $\sqrt{(}1+t)$ à l'ordre $n-1 = 2$ est $F = 1 + \dfrac{1}{2}X - \dfrac{1}{8}X^2$. Une racine carrée de la matrice $A = I_3 + N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est donc

$$M = F(N) = I_3 + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$