INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

I. Fonctions continues par morceaux

1. Définition (sur un segment).

Définition. Soit $S = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, une fonction $f : S \to \mathbb{K}$ est dite **continue par morceaux** (en abrégé **c.p.m.**) s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$ de S telle que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de f à l'intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ soit prolongeable en une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$.

Rappelons qu'une subdivision de $S = [a, b]$ est une liste $\sigma = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$ de réels telle que

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b \ .$$

Une subdivision σ de S vérifiant les conditions de cette définition est dite **adaptée à** f.

La définition ci-dessus peut sembler un peu alambiquée (des restrictions prolongeables, bouârf!), cela signifie (mais c'est plus long à écrire) que la fonction f:

- est continue sur chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$, $0 \leq i \leq n-1$;

- admet une limite à gauche finie en chaque point a_i, $1 \leq i \leq n$;

- admet une limite à droite finie en chaque point a_i, $0 \leq i \leq n-1$.

Autrement dit, la fonction f admet sur le segment S un nombre fini de points de discontinuité, et ce sont des "discontinuités de première espèce" (*vocabulaire hors programme*), c'est-à-dire avec existence de limites à gauche et à droite finies.

Remarque. La limite à gauche de f en un point x_0, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, est souvent notée abusivement $f(x_0^-)$. De même pour la limite à droite, on note $f(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$.

Exemple. La fonction **partie entière** $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$. Ses points de discontinuité sont les entiers relatifs (et, dans un segment de $\mathbb{R}$, il y en a un nombre fini), et pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a $f(n^-) = n - 1$ et $f(n^+) = f(n) = n$: la fonction partie entière est continue à droite en tout point.

Exemple. Plus généralement, les fonctions **en escalier** sur S sont c.p.m. sur S. Rappelons que f est en escalier sur $S = [a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \cdots, a_n)$ de S telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$, $0 \leq i \leq n-1$, soit constante.

Proposition. Toute fonction continue par morceaux sur un segment de $\mathbb{R}$ est bornée sur ce segment (mais, dans le cas des fonctions réelles, n'atteint pas nécessairement ses bornes).

Preuve. Soit $S = [a, b]$, soit $f : S \to \mathbb{K}$ c.p.m., soit $\sigma = (a_0, \cdots, a_n)$ une subdivision de S adaptée à f. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, notons f_i la restriction de f à l'intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$. Alors chaque f_i est bornée car prolongeable en une fonction continue $\widehat{f_i}$ sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$, il existe donc $M_i \in \mathbb{R}_+$ tel que $\big|f(x)\big| = \big|f_i(x)\big| \leq M_i$ sur $]a_i, a_{i+1}[$. Posons

$$M = \max\Big\{M_0, \cdots, M_{n-1}, \big|f(a_0)\big|, \cdots, \big|f(a_n)\big|\Big\} \ .$$

On a bien $\forall x \in S \quad \big|f(x)\big| \leq M$.

Toutefois, la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x$ si $x \in [0, 1[$ et $f(1) = 0$ est c.p.m. sur $[0, 1]$, mais sa borne supérieure 1 n'est pas atteinte.

Proposition. L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment S de $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on le notera $\mathcal{C}_m(S, \mathbb{K})$. De plus, si f et g sont c.p.m. sur S, alors le produit fg l'est aussi.

2. Intégrale sur un segment d'une fonction c.p.m. réelle.

a. Un lemme (hors programme). Si $f : S = [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux et si on se donne $\varepsilon > 0$, alors il existe deux fonctions φ et ψ en escalier sur S telles que

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \psi - \varphi \leq \varepsilon \quad \text{sur } S\ .$$

(*admis*). Ce lemme dit que toute fonction c.p.m. réelle peut être encadrée par deux fonctions en escalier, respectivement minorante et majorante, et que l'on peut "resserrer" autant que l'on veut la précision ε de cet encadrement. Ce lemme se démontre assez facilement avec la notion de continuité uniforme et le théorème de Heine (*programme MPSI-MP uniquement*).

b. Définition de l'intégrale (non exigible).

On commence par définir l'intégrale d'une fonction en escalier: si $f : S = [a, b] \to \mathbb{R}$ est en escalier, si $\sigma = (a_0, \cdots, a_n)$ est une subdivision de S adaptée à f (i.e. telle que f garde une valeur constante C_i sur chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$), on pose $\displaystyle\int_S f = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) C_i$, c'est une somme d'aires (algébriques) de rectangles. *On admet que cette valeur ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée à f.*

Soit $S = [a, b]$, soit maintenant $f : S \to \mathbb{R}$ continue par morceaux.

On appelle **intégrale supérieure** de f et on note $\mathcal{I}_+(f)$ la borne inférieure des intégrales des fonctions en escalier majorant f sur S. De même, on appelle **intégrale inférieure** de f et on note $\mathcal{I}_-(f)$ la borne supérieure des intégrales des fonctions en escalier minorant f sur S. On a alors $\mathcal{I}^+(f) = \mathcal{I}^-(f)$ et cette valeur commune est appelée **intégrale** de f sur S et notée $\displaystyle\int_S f$. *L'existence de $\mathcal{I}^+(f)$ et $\mathcal{I}^-(f)$ résulte du caractère borné des fonctions continues par morceaux sur S, leur égalité résulte du lemme énoncé dans le paragraphe* **a.**, *je ne détaillerai pas plus.*

c. Propriétés de l'intégrale.

Dans tout ce paragraphe, $S = [a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$.

Linéarité. L'application $\mathcal{I} : \begin{cases} \mathcal{C}_m(S, \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_S f \end{cases}$ est une forme linéaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}_m(S, \mathbb{R})$.

admis.

On a donc, pour f et g continues par morceaux et à valeurs réelles sur S, pour λ réel,

$$\int_S (\lambda f + g) = \lambda \int_S f + \int_S g\ .$$

Positivité. Soit $f : S \to \mathbb{R}_+$ une fonction c.p.m. positive, alors $\displaystyle\int_S f \geq 0$.

admis.

Croissance. Soient $f, g : S \to \mathbb{R}$ deux fonctions c.p.m. telles que $f \leq g$ sur S. On a alors $\displaystyle\int_S f \leq \int_S g$.

<u>Preuve.</u> Cela résulte de la linéarité et de la croissance. En effet, on a $g - f \geq 0$ *donc, par positivité,* $\displaystyle\int_S (g-f) \geq 0$ *puis, par linéarité,* $\displaystyle\int_S g - \int_S f \geq 0$*, ce qu'il fallait prouver.*

<u>Conséquence: inégalité de la moyenne.</u> Soit $f : S \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Si on a $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in S = [a,b]$, alors $\displaystyle m(b-a) \leq \int_S f \leq M(b-a)$.

<u>Inégalité triangulaire intégrale.</u> Soit $f \in \mathcal{C}_m(S, \mathbb{R})$, on a alors $\boxed{\left|\displaystyle\int_S f\right| \leq \int_S |f|}$.

<u>Preuve.</u> On a $-|f| \leq f \leq |f|$ *donc, par croissance de l'intégrale (et linéarité pour la multiplication par le réel* -1*):* $\displaystyle -\int_S |f| \leq \int_S f \leq \int_S |f|$*, et cet encadrement est équivalent à l'inégalité que l'on cherche à démontrer. On admettra que, si* f *est c.p.m., alors* $|f|$ *aussi.*

<u>Notations et extension.</u> Si $S = [a,b]$ et $f : S \to \mathbb{R}$ est c.p.m., l'intégrale de f sur S est notée $\displaystyle\int_S f$ ou $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, mais on pourra l'écrire aussi $\displaystyle\int_a^b f$, ou encore, en introduisant une "variable muette" $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Cette dernière écriture sera généralisée de la façon suivante: si u et v sont deux réels appartenant à S, on posera

$$\int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \displaystyle\int_{[u,v]} f & \text{si } u < v \\ 0 & \text{si } u = v \\ \displaystyle -\int_{[v,u]} f & \text{si } u > v \end{cases} .$$

Avec ces notations, si u, v, w sont trois points de S, on a la **relation de Chasles**:

$$\int_u^w f(x)\,\mathrm{d}x = \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x + \int_v^w f(x)\,\mathrm{d}x .$$

<u>Théorème de stricte positivité.</u> Si $f : S = [a,b] \to \mathbb{R}_+$ (avec $a < b$) est <u>continue</u> et positive sur S, alors $\displaystyle\int_S f$ est nulle si et seulement si f est nulle sur S.

Preuve: cf. cours de 1ère année.

<u>Attention!</u> Ce théorème "de stricte positivité" ne vaut que pour les fonctions **continues**, et pas pour des fonctions continues par morceaux.

3. <u>Extension aux fonctions complexes.</u>

Si $f : S \to \mathbb{C}$ est c.p.m., alors les fonctions réelles $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ et $|f|$ sont aussi c.p.m., et on pose

$$\int_S f = \int_S \mathrm{Re}(f) + i \int_S \mathrm{Im}(f) .$$

On a ainsi $\displaystyle\mathrm{Re}\Big(\int_S f\Big) = \int_S \mathrm{Re}(f)$ et $\displaystyle\mathrm{Im}\Big(\int_S f\Big) = \int_S \mathrm{Im}(f)$.

Dans ce contexte, on a toujours

Linéarité. **L'application** $\mathcal{I}$: $\begin{cases} \mathcal{C}_m(S,\mathbb{C}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_S f \end{cases}$ **est une forme linéaire sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{C}_m(S,\mathbb{C})$.**

Inégalité triangulaire intégrale (majoration du module). Soit $f \in \mathcal{C}_m(S,\mathbb{C})$, on a alors

$$\left| \int_S f \right| \leq \int_S |f| \; .$$

4. **Fonctions c.p.m. sur un intervalle quelconque.**

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est dite **continue par morceaux** (**c.p.m.**) sur I si sa restriction à tout segment de I est continue par morceaux.

Exemples. La fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est c.p.m. sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ est c.p.m. sur $]0,1]$. *Preuve laissée au lecteur.*

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est c.p.m., alors pour tous $a \in I$ et $b \in I$, on peut définir l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et, si a, b, c sont trois points de I, on a la relation de Chasles

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x \; .$$

II. Rappels du cours de PCSI et extensions aux fonctions c.p.m.

1. **Le théorème fondamental de l'analyse (lien entre intégrale et primitive).**

Théorème. Toute fonction f continue sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, admet des primitives sur I. Plus précisément, si $a \in I$, alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule au point a.

Preuve. Relire le cours de 1ère année!

Remarque. La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est ce que l'on appelle parfois une "intégrale fonction de sa borne supérieure". Dans l'écriture $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, le symbole x est une "variable libre" (le résultat de cette intégrale dépend de x), l'écriture de l'intégrande doit alors faire intervenir une "variable muette", ici t, qui est un peu l'analogue de la notion de "variable locale à une procédure (ou fonction)" en informatique, la variable t "ne pouvant pas vivre" en dehors de l'intégrale. L'écriture $\displaystyle\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$ prêterait à confusion et doit être proscrite!! Cette "variable d'intégration" joue le même rôle qu'un "indice de sommation" dans une somme, comme la lettre k dans l'écriture $\displaystyle\sum_{k=1}^n k^2$: la valeur $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ de cette somme s'exprime en fonction de n (variable libre) et non de k (variable muette). Il est essentiel de comprendre ces conventions de notation.

Avec les notations du théorème fondamental ci-dessus, la fonction F est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec $F' = f$. Les primitives de f diffèrent bien sûr d'une constante. En utilisant ce théorème fondamental, il est possible de faire l'étude (et notamment de dériver) des fonctions définies à l'aide d'intégrales, par exemple:

Exercice II.1.1. Sur $]0,1[\, \cup\,]1,+\infty[$, dériver la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$, étudier les variations de g sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$. $\square$

Exercice II.1.2. Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue, soient $u, v : J \to I$ de classe $\mathcal{C}^1$, où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. Pour $x \in J$, on pose $g(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J est exprimer $g'(x)$ pour $x \in J$. $\square$

Conséquences du théorème fondamental.

(1). Si $f : I \to \mathbb{K}$ est continue, si $(a,b) \in I^2$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f sur I.

(2). Si $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, si $(a,b) \in I^2$, alors $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$.

Extension aux fonctions continues par morceaux.

Tout d'abord, une fonction continue par morceaux, mais pas continue (c'est-à-dire ayant au moins un point de discontinuité), sur un intervalle I n'admet pas de primitive sur cet intervalle. Je me limite à un exemple, celui de la fonction signe sgn : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Cette fonction est c.p.m. sur $\mathbb{R}$. Supposons qu'elle admette une primitive F sur $\mathbb{R}$, alors F est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $F' = \operatorname{sgn}$. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} F'(x) = 1$ (puisque $F'(x) = \operatorname{sgn}(x) = 1$ pour $x > 0$). Le théorème de la limite de la dérivée affirme alors que $F'(0) = 1$, ce qui est absurde puisqu'on doit avoir $F'(0) = \operatorname{sgn}(0) = 0$.

En revanche, si f est c.p.m. sur un intervalle I, et si on fixe $a \in I$, il est toujours possible, pour tout x de I, de considérer l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ qui est l'intégrale de f sur le segment $[a,x]$ ou $[x,a]$. La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ n'est plus tout à fait une primitive de f, mais ce n'en est pas loin puisqu'elle est continue sur I, et dérivable en tout point x_0 de I qui n'est pas une discontinuité de f avec dans ce cas $F'(x_0) = f(x_0)$. *On admet...*

Le lecteur vérifiera par exemple que, avec $f = \operatorname{sgn}$, alors $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = |x|$. La fonction valeur absolue est donc la "primitive généralisée" de la fonction signe s'annulant en 0.

2. Intégration par parties.

Rien de nouveau dans ce paragraphe puisque les fonctions doivent être de classe $\mathcal{C}^1$. Donc, si $f, g : [a, b] \to \mathbb{K}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, on a

$$\int_a^b f(t)\, g'(t)\, \mathrm{d}t = \big[f(t)g(t)\big]_a^b - \int_a^b f'(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t\ .$$

3. Changement de variable.

Théorème. Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient d'autre part α et β réels avec $\alpha < \beta$, $\varphi : [\alpha, \beta] \to I$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On a alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\, \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u)\, \varphi'(u)\, \mathrm{d}u\ .$$

Commentaire. On ne cherchera pas à étendre ce résultat au cas où f est seulement continue par morceaux.

Preuve. Soit F une primitive de f sur I. On a alors $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\, \mathrm{d}t = F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big)$.

Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, de dérivée f, l'application composée $F \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$, de dérivée $(f \circ \varphi)\varphi'$. Donc

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u)\, \varphi'(u)\, \mathrm{d}u = \big[F \circ \varphi\big]_\alpha^\beta = F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big)\ .$$

4. Sommes de Riemann.

Théorème. Si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux, alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big) = \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t\ .$$

On admet! La démonstration peut toutefois être exigée dans le cas particulier où f est lipschitzienne.