DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 1
COMMENTAIRES
PSI2 2023-2024

PROBLÈME 1

Je note de gros soucis de rigueur dans l'écriture des calculs asymptotiques, parfois des confusions entre une suite et sa limite, ou des formulations incorrectes comme $u_n \underset{n\to+\infty}{=} l$, alors que les bonnes notations sont $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, ou encore (mais c'est un peu plus lourd) $u_n \underset{n\to+\infty}{=} l + o(1)$. Il importe d'être rigoureux et précis sur l'écriture de ces notions, sans quoi on en arrive vite à écrire des bêtises!

A.2. Pour écrire que $a_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{P}{P} = 1$, **il est essentiel de rappeler que** $P \neq 0$ par définition d'un produit infini convergent.

Les démonstrations par l'absurde (idée saugrenue!) sont toutes fausses: en effet, ce n'est pas facile d'exprimer la négation de $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, tous ceux qui ont essayé ont oublié que, dans ce cas, **la suite** (a_n) **peut très bien ne pas avoir de limite!!!**

A.3. La conclusion de l'étude du produit infini P n'est pas toujours clairement formulée: plusieurs d'entre vous s'arrêtent à $\lim\limits_{n\to+\infty} P_{2n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P_{2n+1} = 1$. Oui, et alors ?

A.4.a. Souvent bien traité.

A.4.b. Le critère des équivalents pour les séries à termes positifs n'est pas souvent mentionné, on a pourtant $r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$, et non pas $r_n = \dfrac{1}{2n}$.

A.4.c. La divergence "vers $-\infty$" des sommes partielles est à expliquer.

A.5.a. Plusieurs d'entre vous montrent que, si $\sum u_n$ converge alors $\sum \ln(1+u_n)$ converge, et ensuite que, si $\sum \ln(1+u_n)$ diverge alors $\sum u_n$ diverge... et ne se rendent pas compte qu'ils disent en fait deux fois la même chose! **Ne pas confondre réciproque et contraposée!**

A.5.b. Question souvent un peu vite expédiée. Rédiger soigneusement en considérant des sommes partielles et des produits partiels était vivement conseillé.

B.2.a. Mentionner la continuité de f en 0 pour justifier $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = a$.

B.2.b. Question demandant une rédaction précise, vue dans peu de copies.

B.2.c. Ne pas oublier de traiter condition **nécessaire**: la fonction f est nécessairement de la forme $a \cdot \mathrm{sinc}$, puis condition **suffisante**: vérifier que ces fonctions sont bien solutions du problème posé.

PROBLÈME 2

Ce problème, dont la dernière partie est un peu technique, présente différentes méthodes de démonstration d'irrationalité.

1. Questions classiques et faciles.

2.b. Certains ont compris que la contradiction vient du fait qu'un entier ne peut être strictement compris entre deux entiers consécutifs, mais considèrent en fait des nombres qui ne sont pas forcément des entiers comme $q\, u_q$, au lieu de $q!\, u_q$.

3.a. Question facile si on s'y prend bien, j'ai vu beaucoup de démonstrations maladroites, et des récurrences parfaitement inutiles!

3.c. Représenter un tableau de variations est ici recommandé.

3.d. Ne pas oublier de mentionner la **continuité** de l'intégrande pour invoquer le “théorème de stricte positivité”!

4.b. Les calculs ne sont pas toujours bien menés, des fractions avec des factorielles au dénominateur sont parfois présentées comme des entiers alors que ce n'est pas toujours le cas.

5.a. Question un peu délicate à rédiger.

5.b. La contradiction ne ressort pas toujours très clairement dans votre argumentation. Peut-être avez-vous entendu dire qu'une suite d'entiers ne converge que si elle est stationnaire, mais ce n'est pas clairement écrit (et ce n'est pas un “théorème” au programme). L'argument le plus simple me semble de dire que, si I_n est un entier relatif (**5.a.**) strictement positif (**3.d.**), alors $I_n \geq 1$, ce qui est incompatible avec $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ (**3.e.**).

6.b. Des manipulations d'inégalités où il importe que l'une d'elles soit stricte, cela n'apparaît pas toujours clairement.

Tout ce qui suit est assez technique, et n'a été abordé que dans peu de copies, avec plus ou moins de succès. Préférant commenter les erreurs fréquentes sur les choses fondamentales, je n'ai donc pas grand-chose à dire sur cette fin de problème.