COLLES de MATHÉMATIQUES **PSI2 2023-2024**

Semaine 4 : du 09/10 au 13/10

Algèbre linéaire

Le programme de la semaine dernière, et plus particulièrement: matrices de passage et changement de base, trace d'une matrice ou d'un endomorphisme, polynômes d'endomorphismes ou de matrices.

Révisions d'analyse et début du calcul intégral

Fonctions convexes: définition et interprétation géométrique (tout arc est en-dessous de sa sécante), caractérisation par $f'' \geq 0$ pour les fonctions deux fois dérivables. Position par rapport à une tangente si f est dérivable. Fonctions concaves. Inégalités de convexité: $e^x \geq 1+x$, $\ln(1+x) \leq x$. Inégalité $\big|\sin(x)\big| \leq |x|$.

Notion de fonction continue par morceaux (c.p.m.) sur un segment, sur un intervalle quelconque. Propriétés de l'intégrale d'une fonction c.p.m. sur un segment. Changement de variable et intégration par parties, sommes de Riemann.

Rappel du lien entre intégrales et primitives dans le cas des fonctions continues ("théorème fondamental de l'analyse"). Étude de fonctions de la forme $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Notion de convergence d'une intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, avec $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux, $I = [a,b[$ ou $]a,b]$ ou $]a,b[$. Notion d'intégrale convergente en a, en b. Propriétés. Si $0 \leq f \leq g$ et si l'intégrale de g est convergente, alors l'intégrale de f est convergente.

Exemples de référence $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

Calculs d'intégrales généralisées, utilisant éventuellement des changements de variable ou des intégrations par parties.

Ne sont pas encore exigibles: le terme de fonction intégrable, les critères de comparaison utilisant des comparaisons locales aux bornes.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Matrices de passage, effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.
- Trace d'un projecteur.
- Si A et B sont semblables, alors $P(A)$ et $P(B)$ le sont aussi, avec $P \in \mathbb{K}[X]$.
- Fonctions convexes: montrer la croissance de $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, interprétation graphique.
- Fonctions convexes dérivables: sachant f' croissante, étudier la position de l'arc par rapport à une tangente.
- Dérivation de $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$, en citant des hypothèses raisonnables sur u, v et f.
- Étude de la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ ou de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.