DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 2

PSI2 2023-2024 **Durée: 4 heures** **07/10/2023**

PROBLÈME 1

Étude du commutant d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

Ce problème contient de nombreuses études d'exemples, et les questions sont très largement indépendantes les unes des autres.

On note E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Pour tout endomorphisme f de l'espace vectoriel E, on note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f :

$$C(f) = \big\{ g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g \big\} \ .$$

De la même façon, si A est une matrice carrée d'ordre n, on notera $C(A)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n qui commutent avec A :

$$C(A) = \big\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA \big\} \ .$$

1. Soient u et v deux endomorphismes de E qui commutent ($u \circ v = v \circ u$). Montrer que les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v.

2. Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, l'ensemble $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

3. Dans cette question, on se donne une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et on suppose qu'elle commute avec toutes les matrices carrées de même format, i.e. on suppose que $C(A) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'objectif de cette question est de montrer que A est une matrice scalaire, i.e. est de la forme $A = \lambda\, I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

a. Soit la matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(1, 2, \cdots, n)$. Calculer les produits DA et AD. En déduire que A est une matrice diagonale.

b. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on note $E_{1,j}$ la matrice élémentaire ayant un coefficient 1 à l'intersection de la première ligne et de la j-ième colonne, les autres coefficients étant nuls. Calculer les produits $AE_{1,j}$ et $E_{1,j}A$.

c. Conclure.

d. Quels sont les endomorphismes $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $C(f) = \mathcal{L}(E)$? Comment les nomme-t-on ?

4. Cas d'un projecteur

Dans cette question, $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur (c'est-à-dire un endomorphisme tel que $p \circ p = p$), on note r son rang.

a. Montrer que $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ (*c'est une propriété du cours, mais on demande ici de détailler la démonstration*).

b. Montrer qu'un endomorphisme g de E appartient à $C(p)$ si et seulement sa matrice, dans une base de E adaptée à la décomposition $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$, est de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, où A et D sont des matrices carrées dont on précisera l'ordre.

c. En déduire que $\dim\big(C(p)\big) = r^2 + (n-r)^2$.

5. Cas d'un endomorphisme nilpotent d'indice n

On suppose dans cette question que l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est **nilpotent d'indice** n, c'est-à-dire que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.

a. Montrer qu'il existe un vecteur x_0 de E tel que la famille $\mathcal{B} = \big(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0)\big)$ soit une base de E.

b. Écrire la matrice A de l'endomorphisme f dans une telle base $\mathcal{B}$.

c. Représenter les matrices A^k, pour k entier de 0 à $n-1$.

d. Montrer que la famille $(I_n, A, A^2, \cdots, A^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

e. Montrer que $C(f) = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, f, f^2, \cdots, f^{n-1})$. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $C(f)$?

6. Cas d'une matrice triangulaire supérieure

Dans cette partie, on note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, et $\mathcal{T}_n^*$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. On se donne par ailleurs une matrice T appartenant à $\mathcal{T}_n$.

a. Montrer que $\mathcal{T}_n$ et $\mathcal{T}_n^*$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Préciser leur dimension.

b. Montrer que $\mathcal{T}_n$ est stable par produit, i.e. le produit de deux matrices triangulaires supérieures et encore une matrice triangulaire supérieure.

On introduit maintenant l'application $\varphi_T : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ \quad M & \mapsto \quad TM - MT \end{cases}$.

c. Montrer que φ_T est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et que le sous-espace $\mathcal{T}_n$ est stable par φ_T.

d. Montrer plus précisément que $\varphi_T(\mathcal{T}_n) \subset \mathcal{T}_n^*$.

e. En déduire que $\dim C(T) \geq n$.

f. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice “trigonalisable”, i.e. semblable à une matrice triangulaire supérieure. Montrer que $\dim C(M) \geq n$.

PROBLÈME 2

PARTIE A. Définition d'une suite de polynômes.

1. Soit n un entier naturel non nul, on définit une application Δ_n de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \qquad \Delta_n(P) = Q \ , \quad \text{avec} \quad Q(X) = P(X+1) - P(X) \ .$$

a. Montrer que Δ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta_n)$.

c. Montrer que $\mathrm{Im}(\Delta_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, il existe un et un seul polynôme B_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$B_n(X+1) - B_n(X) = \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t = 0 \ .$$

On posera par ailleurs $B_0 = 1$ (polynôme constant).

3. Vérifier, pour tout $n \geq 2$, la relation $B_n(1) = B_n(0)$.

4. Montrer que l'on a $B_n' = B_{n-1}$ pour tout entier naturel n non nul. *On pourra traiter à part le cas $n = 1$.*

5.a. Vérifier que $B_1 = X - \dfrac{1}{2}$ et $B_2 = \dfrac{X^2}{2} - \dfrac{X}{2} + \dfrac{1}{12}$.

b. Déterminer B_3 et B_4.

6. Pour tout entier naturel n, prouver la relation $B_n(X) = (-1)^n\, B_n(1-X)$.

7. Pour tout n entier naturel, on pose $b_n = B_n(0)$.

a. Donner les valeurs de b_0, b_1, b_2, b_3, b_4.

b. Montrer que pour tout entier n impair tel que $n \geq 3$, on a $b_n = 0$.

PARTIE B. Application aux séries de Riemann

Pour tout réel $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$ (somme de la série de Riemann d'exposant x).

Les questions **8.**, **9.**, **10.**, **11.** et **12.** peuvent se traiter indépendamment. La question **13.** les utilise toutes.

8. Pour $x > 0$, on pose $\mu(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$. Montrer l'existence de $\mu(x)$ pour $x > 0$ et, pour m entier naturel non nul, exprimer $\mu(2m)$ à l'aide de $\zeta(2m)$.

9. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in \,]0,1[\qquad 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\pi t) = \frac{\sin\big((2n+1)\pi t\big)}{\sin(\pi t)}\ .$$

10.a. Montrer que, si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1[$ vérifiant $g(0) = 0$, alors la fonction φ définie sur $]0,1[$ par $\varphi(t) = \dfrac{g(t)}{\sin(\pi t)}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ (que l'on notera toujours φ), et préciser les valeurs de $\varphi(0)$ et de $\varphi'(0)$ en fonction de $g'(0)$ et de $g''(0)$.

b. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction φ_m sur $]0,1[$ par $\varphi_m(t) = \dfrac{B_{2m}(t) - b_{2m}}{\sin(\pi t)}$.
Montrer que la fonction φ_m est prolongeable par continuité à $[0,1]$ et que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

11. En utilisant une intégration par parties, montrer que, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on a

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^1 f(t)\, \sin(\lambda t)\, \mathrm{d}t = 0\ .$$

12. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_{n,k} = \displaystyle\int_0^1 B_n(t)\, \cos(2k\pi t)\, \mathrm{d}t$. Trouver une relation entre $I_{n,k}$ et $I_{n-2,k}$ pour $n \geq 3$ et en déduire, selon la parité de n, l'expression de $I_{n,k}$ en fonction de n et k.

On pourra admettre que $I_{1,k} = 0$ *et* $I_{2,k} = \dfrac{1}{4k^2\pi^2}$ *pour tout* k *entier naturel non nul.*

13.a. Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$. En développant l'expression $\displaystyle\int_0^1 \varphi_m(t)\ \sin\big((2n+1)\pi t\big)\ \mathrm{d}t$ à l'aide de la question **9.**, démontrer la relation

$$\zeta(2m) = (-1)^{m-1}\,\pi^{2m}\,2^{2m-1}\,b_{2m}\ .$$

b. Calculer les nombres $\displaystyle \zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ et $\displaystyle \zeta(4) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$.

c. En déduire les sommes

$$\mu(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \qquad \text{et} \qquad \mu(4) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^4}\ .$$