CORRIGÉ du D.S. de MATHÉMATIQUES numéro 2
PSI2 2023-2024

PROBLÈME 1

1. Ce sont des démonstrations de cours, relire le cours de math!

2. L'ensemble $C(f)$ est non vide ($0_{\mathcal{L}(E)} \in C(f)$) et stable par combinaison linéaire : si $g \in C(f)$ et $h \in C(f)$, si α et β sont des scalaires, alors

$$(\alpha g + \beta h) \circ f = \alpha(g \circ f) + \beta(h \circ f) = \alpha(f \circ g) + \beta(f \circ h) = f \circ (\alpha g + \beta h) ,$$

donc $\alpha g + \beta h \in C(f)$. Donc $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Bien sûr, on montre de la même façon que, si A est une matrice carrée d'ordre n, alors $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3.a. On calcule $(DA)_{i,j} = i\, a_{i,j}$ et $(AD)_{i,j} = j\, a_{i,j}$. Comme $D \in C(A)$ par hypothèse, on a $DA = AD$ donc $(i-j)\, a_{i,j} = 0$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Lorsque $i \neq j$, cela entraîne $a_{i,j} = 0$: les coefficients de A non situés sur la diagonale sont nuls. Donc A est une matrice diagonale, $A = \mathrm{diag}(a_{1,1}, \cdots, a_{n,n})$, ce que l'on peut écrire aussi $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} E_{i,i}$.

b. En jouant aux dominos avec les matrices élémentaires, on a

$$AE_{1,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} E_{i,i} E_{1,j} = a_{1,1} E_{1,j} \qquad \text{et} \qquad E_{1,j} A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} E_{1,j} E_{i,i} = a_{j,j} E_{1,j} .$$

c. Par hypothèse, $E_{1,j} \in C(A)$, donc $AE_{1,j} = E_{1,j} A$, on en déduit l'égalité $a_{j,j} = a_{1,1}$ et ceci pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, les coefficients de la diagonale de A sont tous égaux, donc A est une matrice scalaire: $A = a_{1,1} I_n$.

d. En interprétant en termes d'endomorphismes le résultat du **c.**, on déduit que les endomorphismes de E commutant avec tous les endomorphismes sont ceux de la forme $\lambda\, \mathrm{id}_E$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, autrement dit les homothéties.

4.a. C'est une démonstration de cours, relire le cours de math! (procéder par analyse-synthèse).

b. Un endomorphisme g de E commute avec p si et seulement si les sous-espaces $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$ sont stables par g : en effet, la condition est nécessaire d'après la question **1.** Réciproquement, supposons $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$ stables par g ; alors, si $x \in E$ se décompose en $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Im}\, p$ et $z \in \mathrm{Ker}\, p$, on a $p(x) = p(y) = y$, puis $g\big(p(x)\big) = g(y)$ tandis que $p\big(g(x)\big) = p\big(g(y)\big) + p\big(g(z)\big) = p\big(g(y)\big) = g(y)$ car $g(z) \in \mathrm{Ker}\, p$, $g(y) \in \mathrm{Im}\, p$ et les éléments de $\mathrm{Im}\, p$ sont invariants par p qui est un projecteur. Finalement, $(p \circ g)(x) = (g \circ p)(x)$.

Or, les endomorphismes stabilisant les sous-espaces $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$ sont caractérisés par le fait que leur matrice dans une base adaptée à la décomposition en somme directe $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$ est diagonale par blocs, de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$.

c. L'espace vectoriel $C(p)$ est isomorphe au produit cartésien $\mathcal{M}_r(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$, donc

$$\dim C(p) = r^2 + (n-r)^2$$

(il y a $r^2 + (n-r)^2$ coefficients à déterminer pour "remplir" une telle matrice).

5.a. Soit $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$ (un tel vecteur existe). Raisonnons par l'absurde : si la famille $\mathcal{B}$ était liée, il existerait des scalaires λ_0, λ_1, $\cdots$, λ_{n-1} non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i\, f^i(x_0) = 0_E$, posons alors $k = \min\{i \in [\![0, n-1]\!] \mid \lambda_i \neq 0\}$. On a en fait $\displaystyle\sum_{i=k}^{n-1} \lambda_i\, f^i(x_0) = 0_E$; en appliquant f^{n-1-k} à chaque membre, on obtient $\lambda_k\, f^{n-1}(x_0) = 0_E$

d'où $\lambda_k = 0$ puisque $f^{n-1}(x_0)$ n'est pas le vecteur nul, et cela contredit la définition de l'entier k. Ce raisonnement prouve que la famille $\mathcal{B}$ est libre ; c'est donc une base de E car elle est constituée de n vecteurs.

b. $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{2,1} + E_{3,2} + \cdots + E_{n,n-1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} E_{i+1,i}$.

c. En jouant aux dominos avec les matrices élémentaires (ou, mieux encore, en recherchant l'image par f^k de chaque vecteur $f^j(x_0)$ de la base $\mathcal{B}$), on obtient $A^k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-k} E_{i+k,i}$, avec $0 \leq k \leq n-1$: en détaillant plus, on part de $A^0 = I_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_{i,i}$, et chaque incrémentation de l'exposant k décale vers le bas (ou vers la gauche) la diagonale de 1, jusqu'à $A^{n-1} = E_{n,1}$. On a bien sûr $A^n = 0_n$, puis $A^k = 0_n$ pour tout entier k tel que $k \geq n$.

d. Raisonnons par l'absurde : si la famille $(I_n, A, A^2, \cdots, A^{n-1})$ était liée, il existerait des scalaires λ_0, λ_1, $\cdots$, λ_{n-1} non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i\, A^i = 0_n$ (relation de dépendance linéaire). On retrouverait alors la même relation de dépendance linéaire entre les endomorphismes id_E, f, f^2, $\cdots$, f^{n-1}, soit $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i\, f^i = 0$. En appliquant cela au vecteur x_0, on déduirait $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i\, f^i(x_0) = 0_E$, donc une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs x_0, $f(x_0)$, $\cdots$, $f^{n-1}(x_0)$, et cela contredit la question **5.a.**

e. L'inclusion $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, f, f^2, \cdots, f^{n-1}) \subset C(f)$ est évidente : tout "polynôme de l'endomorphisme f" commute avec f. Réciproquement, soit g un endomorphisme de E commutant avec f, soit $M = (m_{ij})$ la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$, on doit alors avoir $MA = AM$. Or,

$$MA = \begin{pmatrix} m_{1,2} & m_{1,3} & \cdots & m_{1,n} & 0 \\ m_{2,2} & m_{2,3} & \cdots & m_{2,n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_{n,2} & m_{n,3} & \cdots & m_{n,n} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,n-1} & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,n-1} & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \cdots & m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

(multiplier par A à droite décale les colonnes vers la gauche, multiplier par A à gauche décale les lignes vers le bas). L'égalité $MA = AM$ est alors vraie si et seulement si $\begin{cases} m_{1,2} = m_{1,3} = \cdots = m_{1,n} = 0 \\ m_{1,n} = m_{2,n} = \cdots = m_{n-1,n} = 0 \\ \forall (i,j) \in [\![1, n-1]\!]^2 \quad m_{i+1,j+1} = m_{i,j} \end{cases}$. L'examen de ces conditions montre que la matrice M doit être de la forme $M = \lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \cdots + \lambda_{n-1} A^{n-1}$, donc $M \in \mathrm{Vect}(I_n, A, A^2, \cdots, A^{n-1})$, autrement dit $C(A) = \mathrm{Vect}(I_n, A, A^2, \cdots, A^{n-1})$, ce qui est la traduction matricielle de $C(f) = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, f, f^2, \cdots, f^{n-1})$. La famille $(I_n, A, A^2, \cdots, A^{n-1})$ étant libre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il en est de même de la famille $(\mathrm{id}_E, f, f^2, \cdots, f^{n-1})$ dans $\mathcal{L}(E)$ qui est donc de rang n (égal à son cardinal), donc $\dim C(f) = \dim C(A) = n$.

6. Cas d'une matrice triangulaire supérieure.

a. Il est immédiat que les ensembles $\mathcal{T}_n$ et $\mathcal{T}_n^*$ sont non vides (ils contiennent la matrice nulle) et stables par combinaisons linéaires. Pour construire une matrice triangulaire supérieure d'ordre n, il faut choisir $\dfrac{n(n+1)}{2}$ coefficients arbitraires, et seulement $\dfrac{n(n-1)}{2}$ si l'on impose que les coefficients diagonaux sont nuls.

Donc
$$\dim(\mathcal{T}_n) = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \dim(\mathcal{T}_n^*) = \frac{n(n-1)}{2}\ .$$

On peut aussi dire qu'une base de $\mathcal{T}_n$ est la famille $(E_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}$, alors qu'une base de $\mathcal{T}_n^*$ est la famille $(E_{i,j})_{1\leq i<j\leq n}$, et dénombrer les éléments de ces deux familles de matrices.

b. Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices appartenant à $\mathcal{T}_n$, on a donc $a_{i,j}$ nul dès que $i > j$, et $b_{j,k}$ nul dès que $j > k$. Soit $C = (c_{i,j}) = AB$. On connaît la formule $c_{i,k} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,k}$ pour tout couple $(i,k) \in [\![1,n]\!]^2$. Si $i > k$, alors pour tout indice j, on a $i > j$ **ou** $j > k$ (par contraposition, si $i \leq j$ **et** $j \leq k$, par transitivité de la relation d'ordre, on a $i \leq k$), l'un au moins des deux coefficients $a_{i,j}$ ou $b_{j,k}$ est donc nul, donc $a_{i,j}b_{j,k} = 0$ pour tout j, puis $c_{i,k} = 0$. La matrice $C = AB$ appartient donc aussi à $\mathcal{T}_n$. L'ensemble $\mathcal{T}_n$ est donc stable par produit.

Remarque. *On pouvait aussi raisonner en termes de sous-espaces stables par les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés.*

c. La linéarité de φ_T est une simple formalité. Notons que $\mathrm{Ker}(\varphi_T) = C(T)$.

Si $M \in \mathcal{T}_n$, alors les matrices TM et MT appartiennent aussi à $\mathcal{T}_n$ par la question précédente (puisque $T \in \mathcal{T}_n$), puis $\varphi_T(M) = TM - MT \in \mathcal{T}_n$. Le sous-espace $\mathcal{T}_n$ est donc stable par l'endomorphisme φ_T.

d. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{T}_n$. Posons $T = (t_{i,j})$. On sait déjà que $\varphi_T(M) \in \mathcal{T}_n$. De plus, le coefficient d'indices (i,i) du produit TM vaut $t_{i,i}m_{i,i}$, et celui du produit MT aussi. Donc les coefficients diagonaux de la matrice $\varphi_T(M) = TM - MT$ sont nuls. Donc $\varphi_T(\mathcal{T}_n) \subset \mathcal{T}_n^*$.

e. Notons $\psi_T = \varphi_T\big|_{\mathcal{T}_n}$ la restriction de l'endomorphisme φ_T au sous-espace $\mathcal{T}_n$, appliquons-lui le théorème du rang:
$$\dim(\mathcal{T}_n) = \dim\big(\mathrm{Im}(\psi_T)\big) + \dim(\mathrm{Ker}\,\psi_T)\ .$$

Or, $\mathrm{Im}(\psi_T) = \varphi_T(\mathcal{T}_n) \subset \mathcal{T}_n^*$, et $\mathrm{Ker}(\psi_T) = \mathcal{T}_n \cap \mathrm{Ker}(\varphi_T) \subset \mathrm{Ker}(\varphi_T) = C(T)$. Donc
$$\frac{n(n+1)}{2} = \dim(\mathcal{T}_n) \leq \dim(\mathcal{T}_n^*) + \dim\big(C(T)\big) = \frac{n(n-1)}{2} + \dim\big(C(T)\big)\ ,$$

puis $\dim\big(C(T)\big) \geq \dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{n(n-1)}{2} = n$.

f. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable, alors on peut écrire $M = PTP^{-1}$ avec $T \in \mathcal{T}_n$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Soit alors $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\begin{aligned} N\in C(M) &\iff NM=MN \iff NPTP^{-1}=PTP^{-1}N \\ &\iff P^{-1}NPT=TP^{-1}NP \\ &\iff P^{-1}NP\in C(T)\ . \end{aligned}$$

Introduisons l'application $\theta:\begin{cases}\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\\ U & \mapsto PUP^{-1}\end{cases}$. Cette application θ est clairement un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, elle conserve donc les dimensions. Or, elle envoie $C(T)$ sur $C(M)$, i.e. $C(M)=\theta\big(C(T)\big)$, donc $\dim\big(C(M)\big)=\dim\big(C(T)\big)\geq n$.

Remarque. Nous verrons prochainement que, lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

PROBLÈME 2

PARTIE A. Définition d'une suite de polynômes

1.a. La linéarité de Δ_n est immédiate ; de plus, si $P\in\mathbb{R}_n[X]$, alors le polynôme $\Delta_n(P)$ est de degré au plus $n-1$ (on vérifie que les termes en X^n s'annihilent), donc $\Delta_n(P)\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$, et a fortiori, $\Delta_n(P)\in\mathbb{R}_n[X]$. Finalement, Δ_n est bien un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

b. On a $\mathrm{Ker}(\Delta_n)=\mathbb{R}_0[X]\simeq\mathbb{R}$: en effet, il est immédiat que tout polynôme P constant vérifie $\Delta_n(P)=0$. Réciproquement, si un polynôme P appartient à $\mathrm{Ker}(\Delta_n)$, alors la fonction polynomiale associée à P est 1-périodique, on a donc $P(k)=P(0)$ pour tout k entier naturel, donc le polynôme $Q=P-P(0)$ admet une infinité de racines, donc $Q=0$ et $P=P(0)$: P est un polynôme constant.

c. On a donc $\dim(\mathrm{Ker}\,\Delta_n)=1$; le théorème du rang montre alors que

$$\dim(\mathrm{Im}\,\Delta_n)=\dim\big(\mathbb{R}_n[X]\big)-1=(n+1)-1=n=\dim\big(\mathbb{R}_{n-1}[X]\big)\ .$$

Par ailleurs, on a noté en **a.** que $\mathrm{Im}(\Delta_n)\subset\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Avec une inclusion et l'égalité des dimensions, on conclut que $\mathrm{Im}(\Delta_n)=\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. Comme $\dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}\in\mathbb{R}_{n-1}[X]=\mathrm{Im}(\Delta_n)$, on déduit de **1.c.** qu'il existe au moins un polynôme $Q_0\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Delta_n(Q_0)=\dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}$. De **1.b.**, on déduit alors que les polynômes Q de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\Delta_n(Q)=\dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}$ sont exactement les polynômes $Q=Q_0+C$, où C est une constante réelle. Enfin, la condition $\displaystyle\int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t=0$ détermine entièrement la constante C, puisqu'elle impose $C=-\displaystyle\int_0^1 Q_0(t)\,\mathrm{d}t$. On a donc l'existence et l'unicité d'un polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$ (que nous noterons désormais B_n) tel que

$$Q(X+1)-Q(X)=\frac{X^{n-1}}{(n-1)!}\qquad\text{et}\qquad\int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t=0\ .$$

Remarque. L'équation **(E):** $Q(X+1)-Q(X)=\dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}$, où l'inconnue est le polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$, est une **équation linéaire** puisqu'elle peut s'écrire $\Delta_n(Q)=\dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}$ où Δ_n est une application linéaire. Comme le second membre $\dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}$ appartient à $\mathrm{Im}(\Delta_n)$, cette équation est **compatible**, i.e. admet des solutions. On obtient alors toutes les solutions de **(E)** en ajoutant à une solution particulière Q_0 la solution générale de l'équation homogène associée (i.e. un élément de $\mathrm{Ker}(\Delta_n)$, donc un polynôme constant).

Les polynômes B_n introduits ici sont les **polynômes de Bernoulli**.

3. Pour $n\geq 2$, on a $B_n(1)-B_n(0)=\left[\dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}\right]_{X=0}=0$ car l'exposant $n-1$ est strictement positif.

4. • Pour $n=1$, on doit avoir $B_1\in\mathbb{R}_1[X]$, soit $B_1=aX+b$. Les conditions imposées par la question **2.** donnent $a=1$ et $b=-\dfrac{1}{2}$, donc $B_1=X-\dfrac{1}{2}$, on a bien $B_1'=1=B_0$.

• Pour $n\geq 2$, en dérivant formellement la relation de définition de la question **2.**, on obtient

$$B_n'(X+1)-B_n'(X)=\frac{X^{n-2}}{(n-2)!}\ .$$

De plus, $B_n'\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\displaystyle\int_0^1 B_n'(t)\,\mathrm{d}t=B_n(1)-B_n(0)=0$ d'après **3.** Le polynôme dérivé B_n' vérifie toutes les conditions imposées au polynôme B_{n-1} ; l'unicité d'un polynôme vérifiant ces conditions (question **2.**) permet alors d'affirmer que $B_n'=B_{n-1}$.

5.a. On a obtenu $B_1(X)=X-\dfrac{1}{2}$ à la question précédente.

Continuons : $B_2'=B_1$ donc $B_2=\dfrac{X^2}{2}-\dfrac{X}{2}+b$ avec b réel. La condition $\displaystyle\int_0^1 B_2(t)\,\mathrm{d}t=0$ fournit $b=\dfrac{1}{12}$, d'où le polynôme $B_2=\dfrac{X^2}{2}-\dfrac{X}{2}+\dfrac{1}{12}$.

b. Continuons, c'est rigolo! De la même façon, on obtient $B_3=\dfrac{X^3}{6}-\dfrac{X^2}{4}+\dfrac{X}{12}$ et $B_4=\dfrac{X^4}{24}-\dfrac{X^3}{12}+\dfrac{X^2}{24}-\dfrac{1}{720}$.

6. Posons $C_n(X)=(-1)^n\,B_n(1-X)$, alors $C_n\in\mathbb{R}_n[X]$. Si l'on montre que le polynôme C_n vérifie la propriété de définition de la question **2.**, alors par unicité on déduira que $C_n=B_n$. Or,

$$\begin{aligned}C_n(X+1)-C_n(X) &= (-1)^n\,B_n(-X)-(-1)^n\,B_n(1-X)\\ &= (-1)^{n-1}\big(B_n(-X+1)-B_n(-X)\big)\\ &= (-1)^{n-1}\,\frac{(-X)^{n-1}}{(n-1)!}\ =\ \frac{X^{n-1}}{(n-1)!}\ .\end{aligned}$$

Puis $\displaystyle\int_0^1 C_n(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^1 B_n(u)\,\mathrm{d}u = 0$. Par unicité, $C_n = B_n$, ce qu'il fallait prouver.

7.a. $b_0 = 1$, $b_1 = -\dfrac{1}{2}$, $b_2 = \dfrac{1}{12}$, $b_3 = 0$, $b_4 = -\dfrac{1}{720}$.

b. Pour $n \geq 3$ impair, on a $B_n(0) = B_n(1)$ d'après **3.**, mézôssi $B_n(0) = C_n(0) = (-1)^n B_n(1) = -B_n(1)$, donc $b_n = B_n(0) = 0$.

Les nombres b_n sont les **nombres de Bernoulli**.

PARTIE B. Application aux séries de Riemann

La fonction notée ζ dans l'énoncé est la **fonction zéta de Riemann**.

8. Pour $x > 0$, la suite $\left(\dfrac{1}{k^x}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0 donc, par le théorème des séries alternées, la série $\sum \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^x}$ est convergente, d'où l'existence de $\mu(x)$. Considérons maintenant $\mu(2m) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{2m}}$. On a d'une part, en séparant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs dans $\zeta(2m)$:

$$\zeta(2m) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^{2m}} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^{2m}} = \frac{\zeta(2m)}{4^m} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^{2m}}\ ,$$

d'où on tire $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^{2m}} = \frac{4^m-1}{4^m}\,\zeta(2m)$, et d'autre part

$$\mu(2m) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^{2m}} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^{2m}} = \frac{4^m-1}{4^m}\,\zeta(2m) - \frac{1}{4^m}\,\zeta(2m) = \frac{4^m-2}{4^m}\,\zeta(2m)\ .$$

9. On peut remarquer que $1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\pi t) = \sum_{k=-n}^{n} \cos(2k\pi t) = \mathrm{Re}\Big(\sum_{k=-n}^{n} e^{i2k\pi t}\Big)$. Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n} e^{i2k\pi t} &= e^{-i2n\pi t} \sum_{k=0}^{2n} (e^{i2\pi t})^k = e^{-i2n\pi t}\, \frac{(e^{i2\pi t})^{2n+1} - 1}{e^{i2\pi t} - 1} \\
&= e^{-i2n\pi t}\, \frac{e^{i(2n+1)\pi t}\left(e^{i(2n+1)\pi t} - e^{-i(2n+1)\pi t}\right)}{e^{i\pi t}\left(e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}\right)} \\
&= \frac{2i\,\sin\big((2n+1)\pi t\big)}{2i\,\sin(\pi t)} = \frac{\sin\big((2n+1)\pi t\big)}{\sin(\pi t)}
\end{aligned}$$

(c'est donc un nombre réel). On en déduit la réponse attendue.

10.a La fonction g admet en 0 le développement limité à l'ordre un : $g(t) = g'(0)\,t + o(t)$, tandis que $\sin \pi t = \pi t + o(t)$. Il en résulte que $\displaystyle\lim_{t\to 0} \varphi(t) = \frac{g'(0)}{\pi}$: on posera donc $\varphi(0) = \dfrac{g'(0)}{\pi}$

et, ainsi prolongée, la fonction φ est continue sur $[0,1[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^2$) sur $]0,1[$. Pour montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$, il suffit de montrer que sa dérivée φ' (a priori définie sur $]0,1[$) admet une limite finie en 0 (*théorème de la limite de la dérivée*) ; or, sur $]0,1[$, $\varphi'(t)=\dfrac{g'(t)\,\sin\pi t-\pi\,g(t)\,\cos\pi t}{\sin^2(\pi t)}$. Le dénominateur est équivalent à $\pi^2\,t^2$ et le numérateur $N(t)$ admet pour développement limité à l'ordre deux :
$N(t)=\Big[g'(0)+g''(0)\,t+o(t)\Big]\,\Big[\pi t+o(t^2)\Big]-\pi\,\Big[g'(0)\,t+\dfrac{g''(0)}{2}\,t^2+o(t^2)\Big]\,\Big[1+o(t)\Big]$,
puisque $g(0)=0$, d'où

$$N(t)=\frac{\pi}{2}\,g''(0)\,t^2+o(t^2)\ .$$

Finalement, $\lim\limits_{t\to 0}\varphi'(t)=\dfrac{g''(0)}{2\pi}$. Donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ avec $\varphi'(0)=\dfrac{g''(0)}{2\pi}$.

b. La fonction $g_m\,:\,t\mapsto B_{2m}(t)-b_{2m}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1[$ et vérifie $g_m(0)=0$. En appliquant la question précédente, on déduit que φ_m est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$. De la question **6.**, on déduit que la fonction φ_m possède la propriété de symétrie $\varphi_m(1-t)=\varphi_m(t)$; on peut donc aussi la prolonger en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

11. Pour $\lambda>0$, une intégration par parties donne

$$\int_0^1 f(t)\,\sin\lambda t\,\mathrm{d}t=\frac{f(0)}{\lambda}-\frac{f(1)\,\cos\lambda}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\int_0^1 f'(t)\,\cos\lambda t\,\mathrm{d}t\ .$$

En notant $M=\max\limits_{t\in[0,1]}|f'(t)|$ (bien défini d'après le théorème des bornes atteintes car f' est continue sur le segment $[0,1]$), on a alors la majoration

$$\left|\int_0^1 f(t)\,\sin\lambda t\,\mathrm{d}t\right|\le\frac{|f(0)|+|f(1)|+M}{\lambda}\ ,$$

qui prouve que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\sin\lambda t\,\mathrm{d}t=0$.

Remarque. Le résultat de cette question est le **théorème de Riemann-Lebesgue**.

12. Pour $k\in\mathbb{N}^*$ et $n\ge 3$, deux intégrations par parties donnent

$$\begin{aligned}
I_{n-2,k}&=\int_0^1 B_{n-2}(t)\,\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 B''_n(t)\,\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t\\
&=2k\pi\int_0^1 B'_n(t)\,\sin(2k\pi t)\,\mathrm{d}t\qquad\text{car}\quad B'_n(0)=B'_n(1)\\
&=-4k^2\pi^2\int_0^1 B_n(t)\,\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t\\
&=-4k^2\pi^2\,I_{n,k}\ ,
\end{aligned}$$

ou encore $\forall k\in\mathbb{N}^*\quad\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad I_{n+2},k=-\dfrac{I_{n,k}}{4k^2\pi^2}$. Les nombres $I_{n,k}$ se calculent donc de proche en proche : de $I_{1,k}=\displaystyle\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)\,\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t=0$, on déduit que $I_{2p+1,k}=0$

pour tout $p \in \mathbb{N}$; de $I_{2,k} = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{12} + \frac{1}{12}\right) \cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4k^2\pi^2}$, on déduit que

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad I_{2p,k} = \frac{(-1)^{p-1}}{(4k^2\pi^2)^p}\ .$$

13.a. En utilisant le calcul de la question **9.**, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi_m(t)\,\sin\big((2n+1)\pi t\big)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \varphi_m(t)\,\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t + 2\sum_{k=1}^n \int_0^1 \varphi_m(t)\,\sin(\pi t)\,\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 B_{2m}(t)\,\mathrm{d}t - b_{2m} + 2\sum_{k=1}^n \int_0^1 B_{2m}(t)\,\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t \\
&\qquad -2\,b_{2m} \sum_{k=1}^n \int_0^1 \cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2\sum_{k=1}^n I_{2m,k} - b_{2m}\ ,
\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^1 \varphi_m(t)\,\sin\big((2n+1)\pi t\big)\,\mathrm{d}t = 2\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{m-1}}{(4k^2\pi^2)^m} - b_{2m} = 2\,\frac{(-1)^{m-1}}{4^m\,\pi^{2m}}\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2m}} - b_{2m}\ .$$

Mais, φ_m étant $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ (question **10.b.**), on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \varphi_m(t)\,\sin(2n+1)\pi t\,\mathrm{d}t = 0$ (question **11.**). En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient donc

$$\zeta(2m) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2m}} = (-1)^{m-1}\,2^{2m-1}\,\pi^{2m}\,b_{2m}\ .$$

b. Avec $m=1$, on a $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 2\,\pi^2\,b_2 = \frac{\pi^2}{6}$.

Avec $m=2$, on a $\zeta(4) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = -8\,\pi^4\,b_4 = \frac{\pi^4}{90}$.

c. En utilisant **8.** on obtient $\mu(2) = \dfrac{1}{2}\,\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{12}$ et $\mu(4) = \dfrac{7}{8}\,\zeta(4) = \dfrac{7\,\pi^4}{720}$.