DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 2

PSI2 2023-2024 **à rendre le 19/10/2023**

PROBLÈME 1: Un opérateur intégral

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $[1,+\infty[$, et a est un réel **strictement positif**.

On note $\mathcal{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur I à valeurs réelles.

Si $f\in\mathcal{E}$, on pose, pour tout $x\in I$,

$$U_a(f)(x)=e^{ax}\int_x^{+\infty}e^{-at}\,f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

PARTIE A. Propriétés élémentaires de l'opérateur U_a.

1. Montrer la convergence de l'intégrale généralisée définissant $U_a(f)(x)$.

2. Montrer que, pour tout $f\in\mathcal{E}$, la fonction $U_a(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et qu'elle est solution sur I de l'équation différentielle

$$(E_a^f)\ :\qquad y'-ay=-f\ .$$

3. Montrer que $U_a(f)$ est la seule solution de l'équation différentielle (E_a^f) qui soit bornée sur I.

4. Montrer que U_a est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$. Est-il injectif ? Est-il surjectif ?

PARTIE B. Étude de certaines restrictions de U_a.

5. Dans cette question **et dans cette question seulement**, on suppose $a=1$. Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ défini par $\mathcal{F}=\mathrm{Vect}(\sin,\cos)$ est stable par U_1. Construire la matrice de l'endomorphisme de $\mathcal{F}$ induit par U_1 relativement à la base $\mathcal{B}=(\sin,\cos)$.

6. Pour tout k entier naturel, on considère la fonction $g_k:I\to\mathbb{R}$ telle que $g_k(x)=x^ke^{-x}$ pour tout $x\in I$.

a. Montrer que $g_k\in\mathcal{E}$ et que, pour tout p entier naturel, la famille $\mathcal{B}_p=(g_0,g_1,\cdots,g_p)$ est libre. On posera $G_k=U_a(g_k)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

b. Soit $p\in\mathbb{N}$. Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathcal{G}_p=\mathrm{Vect}(g_0,g_1,\cdots,g_p)$ est stable par l'endomorphisme U_a.

c. On note $V_a^{(p)}$ l'endomorphisme de $\mathcal{G}_p$ induit par U_a. Montrer que la matrice de $V_a^{(p)}$ relativement à la base $\mathcal{B}_p$ de l'espace vectoriel $\mathcal{G}_p$ est triangulaire supérieure, et préciser ses coefficients diagonaux.

PARTIE C. Propriétés des fonctions conservées par l'opérateur U_a.

7. Soit $f\in\mathcal{E}$. Prouver que $\big|U_a(f)\big|\leq U_a\big(|f|\big)$.

8. Soit $f\in\mathcal{E}$ à valeurs positives. En est-il de même de $U_a(f)$?

9. Soit $f\in\mathcal{E}$ décroissante. Prouver que $a\,U_a(f)\leq f$, puis que $U_a(f)$ est décroissante sur I.

10. Soit $f\in\mathcal{E}$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

a. On donne $\varepsilon>0$. Montrer qu'il existe un réel $A\in I$ tel que

$$\forall t\in[A,+\infty[\qquad \big|f(t)\big|\leq a\,\varepsilon\ .$$

b. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}U_a(f)(x)=0$.

11. Soit $f\in\mathcal{E}$, admettant une limite finie l en $+\infty$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}U_a(f)(x)$.

12. Soit $f\in\mathcal{E}$, positive, et intégrable sur I. On pose $F=U_a(f)$.

a. Prouver la relation

$$\forall x\in I\qquad F(x)-F(1)-a\int_1^xF(t)\,\mathrm{d}t+\int_1^xf(t)\,\mathrm{d}t=0\ .$$

b. En déduire que F est intégrable sur I.

13. Soit $f\in\mathcal{E}$, supposée intégrable sur I (mais pas nécessairement positive). Montrer que la fonction $U_a(f)$ est intégrable sur I.

PROBLÈME 2: Matrices magiques

Soit l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 3$. On note J_n la matrice de E dont tous les coefficients sont égaux à 1. Une matrice M quelconque appartenant à $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera notée $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit l_i la forme linéaire sur E définie par $l_i(M) = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$ (*somme des coefficients de la i-ème ligne de la matrice M*).

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, soit c_j la forme linéaire sur E définie par $c_j(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}$ (*somme des coefficients de la j-ème colonne de la matrice M*).

Soient enfin d et δ les formes linéaires sur E définies par

$$d(M) = \operatorname{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} \qquad ; \qquad \delta(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,n+1-i} \ .$$

1. Dans l'espace vectoriel dual $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, montrer que la famille de formes linéaires $\mathcal{F} = (l_1, \cdots, l_n, c_1, \cdots, c_n)$ est liée. *On explicitera une relation de dépendance linéaire.*

2. Soit F_0 l'ensemble des matrices carrées d'ordre n telles que, sur chaque ligne et sur chaque colonne, la somme des coefficients vaut 0. Montrer que F_0 est un sous-espace vectoriel de E.

3. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n-1}$ une matrice carrée d'ordre $n-1$, montrer qu'il existe une unique matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de F_0 telle que $m_{i,j} = a_{i,j}$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1, n-1]\!]^2$ et expliciter cette matrice M. En déduire que l'application $\varphi : F_0 \to \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ qui, à toute matrice M de F_0, associe la matrice obtenue à partir de M en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne, est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de F_0, puis le rang de la famille de formes linéaires $(l_1, \cdots, l_n, c_1, \cdots, c_n)$.

4. Construire une matrice de F_0 ayant une trace non nulle. En déduire que

$$d \notin \operatorname{Vect}(l_1, \cdots, l_n, c_1, \cdots, c_n) \ .$$

5. Quel est le rang de la famille de formes linéaires $(l_1, \cdots, l_n, c_1, \cdots, c_n, d)$?

On pose $G_0 = F_0 \cap \operatorname{Ker} d$. Quelle est la dimension de G_0 ?

6. Construire une matrice M de G_0 telle que $\delta(M) \neq 0$. *Indications : pour $n \geq 4$, on pourra utiliser un bloc de la forme* $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$*, les autres coefficients étant nuls ; pour $n = 3$, faites preuve d'ingéniosité!*

7. On pose $H_0 = G_0 \cap \operatorname{Ker} \delta$. Quelle est la dimension de H_0 ?

8. On note enfin H l'ensemble des **matrices magiques** carrées d'ordre n, c'est-à-dire des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que la somme des coefficients soit la même sur chaque ligne, chaque colonne et chacune des deux diagonales. Montrer que $H = H_0 \oplus \operatorname{Vect}(J_n)$. En déduire la dimension de H.

9. Construire une base de H dans le cas $n = 3$. Montrer qu'il existe une unique matrice magique d'ordre 3 dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ et l'expliciter.