Calculs de déterminants.

1. Calculer les déterminants d'ordre n :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & \dots & n \\ n & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & n-1 & n \\ n & \dots & \dots & n & n \end{vmatrix}_{(n)} \quad ; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ a & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(n)}.$$

2. Calculer $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & n & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(n)}$, puis $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & n & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}_{(n)}$. On exprimera le résultat à l'aide du nombre $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

3. Soient a_1, a_2, …, a_n, b, c des réels avec $b \neq c$. Montrer que le déterminant

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_1 + x & c + x & \dots & c + x \\ b + x & a_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c + x \\ b + x & \dots & b + x & a_n + x \end{vmatrix}_{(n)}$$

est une fonction affine du réel x. En déduire la valeur de $D(0)$.

4. Soit la matrice $A = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, avec $a_{i,j} = \dbinom{i+j}{i}$. Calculer $\det(A)$.

5. Calculer le déterminant d'ordre n :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} 2\cos x & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2\cos x \end{vmatrix}.$$

Exercices théoriques.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit φ_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $M \mapsto AM$. Calculer la trace et le déterminant de φ_A.

7. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

a. Calculer $AA^\top$. En déduire $\det(A)$.

b*. Soient n et p deux entiers naturels. On suppose que n et p peuvent chacun s'écrire comme une somme de quatre carrés d'entiers naturels. Montrer que l'entier np est aussi somme de quatre carrés d'entiers naturels.

8. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices réelles. On suppose que A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$:

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \qquad PA = BP\ .$$

En décomposant P en $P = Q + iR$, où Q et R sont des matrices réelles, et en considérant l'application $f : \lambda \mapsto \det(Q + \lambda R)$, montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$, i.e.

$$\exists S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \qquad SA = BS\ .$$

9. Dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$, montrer que quatre points A, B, C, D sont coplanaires (appartiennent à un même "plan affine") si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & z_A \\ 1 & x_B & y_B & z_B \\ 1 & x_C & y_C & z_C \\ 1 & x_D & y_D & z_D \end{vmatrix}$ est nul.

Déterminants de Vandermonde et assimilés.

10. Soient a_0, a_1, ..., a_n des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Montrer que la famille de polynômes $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ où, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P_i(X) = (X + a_i)^n$, est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. *On pourra utiliser un déterminant de Vandermonde.*

11*. Déterminants de Cauchy et de Hilbert

On considère des réels $a_1, \cdots, a_n$ et $b_1, \cdots, b_n$. On suppose que, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a $a_i + b_j \neq 0$. Soit la matrice $C = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $c_{i,j} = \dfrac{1}{a_i + b_j}$. Calculer le déterminant de la matrice C. *On pourra commencer par effectuer les opérations élémentaires sur les colonnes $C_j \leftarrow C_j - C_n$, avec $1 \leq j \leq n-1$.* Calculer en particulier le déterminant de $H = (h_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $h_{i,j} = \dfrac{1}{i + j}$.

Déterminants de matrices par blocs.

12. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ des matrices. On suppose que A est inversible. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\det M = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B)\ .$$

13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $M = \begin{pmatrix} I_n & A \\ A & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. À quelle condition la matrice M est-elle inversible ? Donner son inverse si c'est possible.

14. Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n. On suppose que u et v commutent, et que v est nilpotent. On souhaite montrer par récurrence sur l'entier n la propriété $\det(u + v) = \det(u)$.

a. Traiter le cas $n = 1$.

b. Pour $n \geq 2$ et $v \neq 0$, former les matrices de u et de v dans une base de E adaptée à $\mathrm{Im}(v)$.

c. Conclure en appliquant l'hypothèse de récurrence aux endomorphismes induits par u et v sur $\mathrm{Im}(v)$.