DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 2
COMMENTAIRES
PSI2 2023-2024

PROBLÈME 1

1. Question de cours, dont la rédaction manquait parfois un peu de netteté: dire que $\operatorname{Ker} u$ est stable par v signifie que, si $x \in \operatorname{Ker}(u)$, alors $v(x) \in \operatorname{Ker}(u)$, c'est ce qui me semble être le plus pratique à rédiger. La formulation équivalente $v(\operatorname{Ker} u) \subset \operatorname{Ker} u$ conduit à des rédactions un peu embrouillées où l'on se demande parfois si la question a été bien comprise.

3.a. Il est commode de remarquer le lien avec les opérations élémentaires de type "dilatation": multiplier A à gauche par la matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ revient à multiplier la i-ième ligne de A par λ_i (pour tout i), alors que multiplier A à droite par D revient à multiplier la j-ième colonne de A par λ_j (pour tout j).

3.b. Des développement parfois très longs (regardez mon corrigé, le calcul tient en une ligne!). Bien sûr, représenter quelques tableaux matriciels peut aider à la compréhension, mais les calculs écrits sont souvent maladroits et traînent en longueur.

Et surtout, bien prendre garde à ne jamais écrire d'égalité entre des objets de nature différente, comme entre une matrice et un scalaire, ou bien entre une matrice carrée et une matrice-colonne, etc.

4.b. L'énoncé demande de démontrer un "si et seulement si". Souvent un seul sens a été traité.

Le plus rapide est sans doute de remarquer que le projecteur p est lui-même représenté par une matrice très simple dans la base adaptée, on obtient alors directement l'équivalence demandée en effectuant un produit matriciel par blocs.

Sinon, pour la réciproque, en supposant que g est représenté par une matrice diagonale par blocs, on en déduit facilement que $\operatorname{Ker}(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$ sont stables par g... mais il reste encore à démontrer que cela entraîne que g commute avec p.

4.c. Une grosse confusion vue dans beaucoup de copies (dans presque toutes en fait): des notations comme $\dim(A)$ "dimension d'**une** matrice" alors qu'il s'agissait de discuter de la dimension d'un espace vectoriel de matrices, i.e. d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Cela n'a rien à voir non plus avec la notion de rang d'une matrice.

5.a. Il faut partir d'un vecteur x_0 tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$, et l'annoncer clairement dès le départ!

5.e. Une inclusion facile, l'autre moins.

6.a. Peu de réponses pour la dimension, et souvent alors données sans explication.

6.e. Il fallait penser ici à introduire une restriction de l'endomorphisme φ_T. Les bonnes réponses sont rares.

PROBLÈME 2

Un problème dont la deuxième partie est un peu technique. La première partie, en revanche, propose plusieurs questions assez faciles, certaines reposant sur l'**unicité** du polynôme B_n introduit à la question **2.** Malheureusement, dans de nombreuses copies, on voit des tentatives de démonstrations par récurrence pour les questions **4.**, **6.**, **7.b.**, cela n'aboutit pas toujours et puis c'est lourd, c'est lourd, alors qu'une preuve directe était assez facile, justement en utilisant l'unicité de B_n (questions **4.** et **6.**).

1.a. Même si l'énoncé présente Δ_n comme allant de $\mathbb{R}_n[X]$ vers lui-même, le caractère "endo" doit tout de même être justifié.

1.b. Ce n'est pas si évident qu'un polynôme P vérifiant $P(X+1) = P(X)$, autrement dit un polynôme "1-périodique", est nécessairement constant, cela nécessite une démonstration.

1.c. L'inclusion $\mathrm{Im}(\Delta_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ est facile, il ne faut pas affirmer trop vite que ces deux sous-espaces sont égaux.

2. Question délicate, je n'ai vu aucune bonne réponse.

4. Beaucoup arrivent à l'égalité $B'_n(X+1) - B'_n(X) = B_{n-1}(X+1) - B_{n-1}(X)$ et en déduisent, "par identification" (?), que $B'_n = B_{n-1}$. Mais, quand on dit "par identification", c'est toujours qu'il y a une propriété d'unicité de quelque chose et, bien sûr, c'est à vous de préciser de quoi. Ici, c'est l'unicité mentionnée à la question **2.** dans la définition de B_n qu'il fallait mentionner.

5.b. Un peu de calcul ne peut pas faire de mal.

8. Très très peu de calculs corrects pour arriver à la relation entre $\mu(2m)$ et $\zeta(2m)$, les manipulations de sommes posent encore des problèmes, visiblement.

9. Peu de calculs aboutissent.

10.a. Question de calcul asymptotique un peu technique, et bien sûr jamais réussie.

11. Tout le monde pense à l'intégration par parties. Mais ensuite il faut majorer la valeur absolue de l'intégrale en utilisant diverses inégalités triangulaires. Je vous renvoie aussi à l'exercice **27.b.** de la feuille d'exos "fonctions convexes, fonctions intégrables", traité en TD.