

**Fonctions convexes (révisions)**

*cf.* programme précédent

**Fonctions intégrables**

Révisions: intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Théorème fondamental de l'analyse.

Intégrales généralisées, *cf.* programme précédent.

Intégrales absolument convergentes. La convergence absolue entraîne la convergence. Existence d'intégrales semi-convergentes. Notion de fonction intégrable sur un intervalle  $I$ . Fonction intégrable en une borne.

Règles de comparaison: toute fonction (c.p.m.) majorée en module par une fonction intégrable sur  $I$  est elle-même intégrable sur  $I$ . Utilisation de relations de comparaison asymptotique pour montrer l'intégrabilité en une borne de  $I$ . Intégrales "faussement généralisées", i.e. cas des fonctions prolongeables par continuité en une borne (alors finie).

Espace vectoriel  $L^1(I, \mathbb{K})$  des fonctions (c.p.m.) intégrables sur  $I$ . Espace préhilbertien  $L_c^2(I, \mathbb{R})$  des fonctions continues et de carré intégrable sur  $I$ , à valeurs réelles.

**Déterminants**

**Rappel: le groupe symétrique n'est pas au programme de la filière.**

Déterminant d'une famille de  $n$  vecteurs d'un espace vectoriel de dimension  $n$  relativement à une base, caractérisation des bases.

Déterminant d'un endomorphisme, propriétés, caractérisation des automorphismes.

Déterminant d'une matrice carrée. Propriétés fondamentales:  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ , caractérisation des matrices inversibles,  $\det(A^{-1})$ , deux matrices semblables ont le même déterminant.

Déterminants et opérations élémentaires sur les lignes et colonnes, déterminant d'une matrice triangulaire. Une matrice et sa transposée ont le même déterminant.

Cofacteurs, développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Dterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

*Pas encore de déterminant de Vandermonde.*

---

**Démonstrations de cours ou proches du cours**

- Fonctions convexes: montrer la croissance de  $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ , interprétation graphique.
- Fonctions convexes dérivables: sachant  $f'$  croissante, étudier la position de l'arc par rapport à une tangente.
- Dérivation de  $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ , en citant des hypothèses raisonnables sur  $u$ ,  $v$  et  $f$ .
- L'intégrale de Dirichlet  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$  est semi-convergente.
- L'ensemble  $L_c^2(I, \mathbb{R})$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, produit scalaire.
- Description de l'algorithme de Gauss-Jordan pour inverser une matrice carrée supposée inversible. Estimation de la complexité.