Fonctions convexes

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient x, y, z dans I, avec $x < y < z$.

a. Comparer les taux d'accroissement $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ et $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$.

b. Quel est le signe du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} \ ?$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, croissante. Montrer que
- soit f est constante sur $\mathbb{R}$,
- soit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3.a. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, soit $g : I \to J$ une fonction convexe et $h : J \to \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante. Montrer que $h \circ g$ est convexe sur I.

b. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la fonction $g = \ln \circ f$ est convexe sur I si et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, la fonction f^α est convexe sur I.

4. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g(x) = x\, f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Montrer que g est convexe si et seulement si f est convexe.

Intégration sur un segment

5. Trouver les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{y-x}{2}\Big(f(x)+f(y)\Big)\ .$$

6. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout x réel, on pose

$$f(x) = \int_0^x g(t)\,\sin(x-t)\,\mathrm{d}t\ .$$

a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\,\cos(x-t)\,\mathrm{d}t$.

b. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.

c. Achever la résolution de cette équation différentielle.

7. Étude et représentation graphique de $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$. On précisera le comportement de $g(x)$ lorsque $x \to 0$ et lorsque $x \to \pm\infty$.

8. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{\cos^2 x} \mathrm{Arccos}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t + \int_0^{\sin^2 x} \mathrm{Arcsin}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$.

Montrer que la fonction F est constante sur $\mathbb{R}$ et préciser sa valeur.

9. En utilisant une somme de Riemann, donner un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$.

10.a. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$, puis $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha}$ avec $\alpha > 1$.

b. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$.

11. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à $f : t \mapsto \ln(1+t)$ entre 0 et 1, montrer que la série harmonique alternée a pour somme $\ln(2)$, i.e. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

12. Pour p et q entiers naturels, on pose $I_{p,q} = \int_a^b (t-a)^p(b-t)^q \,\mathrm{d}t$.

a. Trouver une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

b. Exprimer $I_{p,q}$ à l'aide de factorielles.

13. Expliciter et représenter $F : x \mapsto \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{3+\cos^2(t)}$.

Convergence et calcul d'intégrales généralisées.

14. Quelle est la nature des intégrales généralisées suivantes ?

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}} \ ; \quad I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t \ ; \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t \ ; \quad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\mathrm{d}t \ .$$

15. Intégrales de Bertrand.

Étudier la nature de l'intégrale $I_{\alpha,\beta} = \int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$, avec α et β deux réels.

16. Montrer la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^{\frac{3}{2}}-1}\,\mathrm{d}t$.

17. Convergence et calcul des intégrales généralisées suivantes:

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}(t)} \ ; \quad I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \ ; \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \ ; \quad I_4 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t \ .$$

18. Convergence et calcul des intégrales généralisées suivantes:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)} \ ; \ I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(e^t+1)(e^{-t}+1)} \ ; \ I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t \ ; \ I_4 = \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t \ .$$

19. Calculer $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, avec $a < b$. *On pourra poser* $x = \frac{a+b}{2} + t$.

20. Convergence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \ln x}{(1+x^4)^3}\, \mathrm{d}x$.

21. Soient les intégrales généralisées $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\, \mathrm{d}t}{1+t^4}$.

a. Montrer leur convergence.

b. Calculer J.

c. Factoriser, dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P = X^4 + 1$.

d. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2\, \mathrm{d}t}{1+t^4}$, puis la calculer.

22. On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, \mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\, \mathrm{d}t$.

a. Montrer que ces intégrales sont convergentes et que $I = J$.

b. Calculer $I + J$. En déduire I et J.

23. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continue, telle que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, \mathrm{d}t$ soit convergente. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

a. Pour $x > 0$, montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\, \mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\, \mathrm{d}t$.

b*. En déduire convergence et valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\, \mathrm{d}t$.

24. Convergence et, le cas échéant, calcul de $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2}\right) \mathrm{d}t$.

Intégrabilité.

25. Montrer que les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2+1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2+4}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer leurs intégrales sur $]0, +\infty[$ sans passer par un calcul de primitive.

26. Soit α un réel tel que $0 < \alpha < 2$.

a. Montrer la convergence de l'intégrale généralisée $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$.

b. Montrer les inégalités $\quad 0 \leq I_\alpha \leq \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$.

27.a. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ (*sinus cardinal*) n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, mais que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ est semi-convergente.

b. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\,\sin \lambda t\,\mathrm{d}t = 0$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ et $K_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que la suite (J_n) est constante, que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (J_n - K_n) = 0$, et en déduire que $I = \dfrac{\pi}{2}$.

d. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

28. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(e^t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

29. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$. *On commencera par linéariser* $\sin^3 x$ *puis on essaiera de décomposer en une somme de deux intégrales.*

30. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

31. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

a. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

b. Montrer que ff' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

32. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f(0) = 0$. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^x \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t \leq 2 \int_0^x \frac{f(t)\,f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t\ ,$$

après avoir prouvé la convergence des intégrales considérées.

33.a. Montrer que $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b*. Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $F(x) \sim \dfrac{2}{\pi} \ln x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

34*. Existence et calcul de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$.

35*. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue et 1-périodique. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente **si et seulement si** $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.