Fonctions convexes

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient x, y, z dans I, avec $x < y < z$.

a. Comparer les taux d'accroissement $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ et $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$.

b. Quel est le signe du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} \ ?$$

- -

a. Comme $y \in]x,z[$, on peut écrire $y = (1-\lambda)x + \lambda z$ avec $\lambda = \dfrac{y-x}{z-x} \in]0,1[$. Par convexité de f, on a $f(y) = f\big((1-\lambda)x + \lambda z\big) \leq (1-\lambda)\,f(x) + \lambda\,f(z)$, ce qui s'arrange en

$$f(y) - f(x) \leq \lambda\,\big(f(z) - f(x)\big) = \frac{y-x}{z-x}\,\big(f(z) - f(x)\big) ,$$

ou encore

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} .$$

b. On a $D = \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 0 & y-x & f(y)-f(x) \\ 0 & z-x & f(z)-f(x) \end{vmatrix}$ en effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. Donc, par développement par rapport à la première colonne,

$$D = (y-x)\,\big(f(z)-f(x)\big) - (z-x)\,\big(f(y)-f(x)\big) .$$

De la question **a.**, on déduit immédiatement que $D \geq 0$.

---

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, croissante. Montrer que
- soit f est constante sur $\mathbb{R}$,
- soit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

- -

Supposons f non constante, alors il existe x et y réels tels que $x < y$ (pour fixer les idées) et $f(x) \neq f(y)$. Comme f est croissante, on a donc $f(y) > f(x)$. Pour $t \geq y$, on a alors $\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x} \geq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ (*cf.* question **a.** de l'exercice précédent), soit encore $f(t) \geq f(x) + \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\,(t-x)$. On a donc minoré, sur $[y,+\infty[$, la fonction f par une fonction affine qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ puisqu'elle a un coefficient directeur strictement positif. Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$.

3.a. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, soit $g : I \to J$ une fonction convexe et $h : J \to \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante. Montrer que $h \circ g$ est convexe sur I.

b. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la fonction $g = \ln \circ f$ est convexe sur I si et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, la fonction f^α est convexe sur I.

- -

a. Si $g : I \to J$ est convexe et $h : J \to \mathbb{R}$ est convexe croissante, alors pour $x \in I$, $y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$, on a, par convexité de g,

$$g\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y) ,$$

donc

$$\begin{aligned}(h\circ g)\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big) &\leq h\big(\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)\big)\\ &\leq \lambda(h\circ g)(x)+(1-\lambda)(h\circ g)(y)\end{aligned}$$

en utilisant successivement la croissance et la convexité de h. On a ainsi prouvé que la fonction composée $h\circ g$ est convexe sur I.

b. • Si $g=\ln\circ f$ est convexe sur I, alors il en est évidemment de même de αg pour $\alpha>0$, puis de $f^\alpha=\exp\circ(\alpha g)$ en utilisant le **a.** puisque la fonction $h=\exp$ est convexe croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Réciproquement, supposons f^α convexe pour tout $\alpha>0$.

Fixons $x\in I$, $y\in I$, $\lambda\in[0,1]$. On a

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}_+^*\qquad f^\alpha\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big)\leq\lambda f(x)^\alpha+(1-\lambda)f(y)^\alpha\ ,$$

donc

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}_+^*\qquad \ln\Big[f\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big)\Big]\leq\frac{1}{\alpha}\ \ln\big(\lambda f(x)^\alpha+(1-\lambda)f(y)^\alpha\big)\qquad\qquad \textbf{(*)}\ .$$

Pour conclure, il suffit de passer à la limite quand α tend vers zéro : en effet, la fonction $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\alpha\mapsto\ln\big(\lambda f(x)^\alpha+(1-\lambda)f(y)^\alpha\big)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}\qquad \varphi'(\alpha)=\frac{\lambda\, f(x)^\alpha\cdot\ln f(x)+(1-\lambda)\ f(y)^\alpha\cdot\ln f(y)}{\lambda\, f(x)^\alpha+(1-\lambda)\ f(y)^\alpha}\ .$$

En particulier, $\varphi'(0)=\lambda\ln f(x)+(1-\lambda)\ln f(y)$. Comme $\varphi(0)=0$, $\lim\limits_{\alpha\to0}\dfrac{\varphi(\alpha)}{\alpha}=\varphi'(0)$. En passant à la limite dans **(*)**, on obtient

$$\ln\Big[f\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big)\Big]\leq\lambda\ln f(x)+(1-\lambda)\ln f(y)\ ,$$

c'est-à-dire la convexité de $g=\ln\circ f$.

---

4. Soit $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on pose $g(x)=x\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Montrer que g est convexe si et seulement si f est convexe.

- -

Supposons f convexe. Soient x et y avec $0\leq x\leq y$, soit $t\in[0,1]$, notons alors que

$$x\leq(1-t)x+ty\leq y\ ,\quad\text{donc}\quad\frac{1}{y}\leq\frac{1}{(1-t)x+ty}\leq\frac{1}{y}\ ,$$

ce qui permet d'écrire

$$\frac{1}{(1-t)x+ty}=(1-s)\ \frac{1}{x}+s\ \frac{1}{y}\ ,\quad\text{avec}\quad s=\frac{ty}{(1-t)x+ty}\in[0,1]\ .$$

Donc

$$
\begin{aligned}
g\big((1-t)x+ty\big) &= \big((1-t)x+ty\big)\cdot f\left(\frac{1}{(1-t)x+ty}\right)\\
&= \big((1-t)x+ty\big)\cdot f\left((1-s)\,\frac{1}{x}+s\,\frac{1}{y}\right)\\
&\leq \big((1-t)x+ty\big)\cdot \left((1-s)\,f\left(\frac{1}{x}\right)+s\,f\left(\frac{1}{y}\right)\right)\\
&= (1-t)\,x\,f\left(\frac{1}{x}\right)+t\,y\,f\left(\frac{1}{y}\right)\\
&= (1-t)\,g(x)+t\,g(y)\ .
\end{aligned}
$$

On a donc prouvé la convexite de g.

La réciproque se traite de la même manière car, si $g(x)=x\,f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, alors $f(x)=x\,g\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Intégration sur un segment

5. Trouver les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telles que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{y-x}{2}\,\big(f(x)+f(y)\big)\ .$$

- -

• Si f vérifie **(*)**, alors f est affine: en effet, soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$, on a

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad F(y)-F(x) = \frac{y-x}{2}\,\big(f(x)+f(y)\big)\ ,$$

puis en dérivant par rapport à y:

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad f(y) = \frac{1}{2}\big(f(x)+f(y)\big)+\frac{y-x}{2}\,f'(y)\ ,$$

soit $f(y)-f(x)=(y-x)\,f'(y)$. En particularisant pour $y=0$, cela donne

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad f(x)=f'(0)\,x+f(0)\ ,$$

donc f est une fonction affine.

• Réiproquement, si f est affine, $f(x)=ax+b$, on vérifie que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad \int_x^y f(t)\mathrm{d}t = \frac{a}{2}(y^2-x^2)+b(y-x) = \frac{y-x}{2}\big(a(x+y)+2b\big) = \frac{y-x}{2}\big(f(x)+f(y)\big)\ .$$

Conclusion: Les solutions sont les fonctions affines.

---

6. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout x réel, on pose

$$f(x) = \int_0^x g(t)\ \sin(x-t)\,\mathrm{d}t\ .$$

a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\ \cos(x-t)\,\mathrm{d}t$.

b. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.

c. Achever la résolution de cette équation différentielle.

- -

a. En transformant $\sin(x-t)$ par les formules d'addition de la trigonométrie, on voit que

$$f(x) = \sin(x) \int_0^x g(t)\ \cos(t)\,\mathrm{d}t - \cos(x) \int_0^x g(t)\ \sin(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Il résulte alors immédiatement du théorème fondamental de l'analyse que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) \int_0^x g(t)\ \cos(t)\,\mathrm{d}t + \sin(x)\, g(x)\ \cos(x) + \sin(x) \int_0^x g(t)\ \sin(t)\,\mathrm{d}t - \cos(x)\, g(x)\ \sin(x) \\ &= \int_0^x g(t)\ \big(\cos(x)\ \cos(t) + \sin(x)\ \sin(t)\big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x g(t)\ \cos(x-t)\,\mathrm{d}t\ . \end{aligned}$$

b. De la même façon, on montre que f' est de classe $\mathcal{C}^1$, donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\sin(x) \int_0^x g(t)\ \cos(t)\,\mathrm{d}t + g(x)\ \cos^2(x) + \cos(x) \int_0^x g(t)\ \sin(t)\,\mathrm{d}t + g(x)\ \sin^2(x) \\ &= -f(x)\ +\ g(x)\ , \end{aligned}$$

donc f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.

c. L'équation est linéaire et on a obtenu une solution particulière, il reste donc à ajouter la solution générale de l'équation homogène $y'' + y = 0$. Cela donne

$$y(x) = A\ \cos(x) + B\ \sin(x) + \int_0^x g(t)\ \sin(x-t)\,\mathrm{d}t\ ,$$

ou encore

$$y(x) = \left(A - \int_0^x g(t)\ \sin(t)\,\mathrm{d}t\right)\ \cos(x) + \left(B + \int_0^x g(t)\ \cos(t)\,\mathrm{d}t\right)\ \sin(x)\ .$$

---

7. Étude et représentation graphique de $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$. On précisera le comportement de $g(x)$ lorsque $x \to 0$ et lorsque $x \to \pm\infty$.

- -

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$. Alors f est définie et continue (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$, notons F l'une d'elles. On peut alors écrire $g(x) = F(2x) - F(x)$, donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$, avec

$$g'(x) = 2f(2x) - f(x) = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2+16x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2+x^4}} = \frac{2\sqrt{1+x^2+x^4} - \sqrt{1+4x^2+16x^4}}{\sqrt{1+4x^2+16x^4}\ \sqrt{1+x^2+x^4}} \ .$$

Comme $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ est du même signe que $a - b$ (avec a et b réels positifs), on déduit que $g'(x)$ est du signe de

$$4\,(1+x^2+x^4) - (1+4x^2+16x^4) = 3\,(1-4x^2)\ .$$

En posant le changement de variable $t = -u$ dans l'intégrale définissant $g(x)$, on voit aussi que la fonction g est impaire. Nous l'étudierons donc sur $\mathbb{R}_+$. Le calcul de dérivée ci-dessus montre que g est croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$, puis décroissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$. De plus, $g(0) = 0$. On a $g'(0) = 1$, donc la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ à l'origine est la première bissectrice. On peut préciser la position par rapport à cette tangente en constatant que, pour $x \geq 0$,

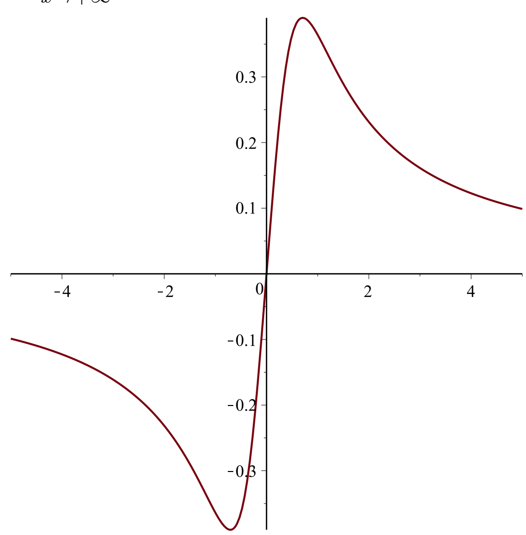
$$g(x) \leq \int_x^{2x} \mathrm{d}t = x\ ,$$

la courbe $\mathcal{C}_g$ est donc (pour $x \geq 0$) en-dessous de la première bissectrice.

Enfin, pour $x > 0$, on a

$$0 \leq g(x) \leq (2x - x)\ \max_{t\in[x,2x]} \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+x^4}} \quad \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0\ ,$$

donc par encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. On peut préciser: $g(x) = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ lorsque $x \to +\infty$.



8. On pose $F(x)=\displaystyle\int_0^{\cos^2 x}\mathrm{Arccos}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sin^2 x}\mathrm{Arcsin}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$.

Montrer que la fonction F est constante sur $\mathbb{R}$ et préciser sa valeur.

- -

Les fonctions $u : t\mapsto \mathrm{Arccos}(\sqrt{t})$ et $v : t\mapsto \mathrm{Arcsin}(\sqrt{t})$ sont définies et continues sur $[0,1]$, notons U et V respectivement leurs primitives s'annulant en zéro ; U et V sont donc des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$.

Les fonctions $\varphi : x\mapsto \cos^2 x$ et $\psi : x\mapsto \sin^2 x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0,1]$.

La fonction $F=U\circ\varphi+V\circ\psi$ est donc définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et admet pour dérivée

$$F'=\varphi'\cdot(U'\circ\varphi)+\psi'\cdot(V'\circ\psi)=\varphi'\cdot(u\circ\varphi)+\psi'\cdot(v\circ\psi)\ ,$$

soit

$$F'(x)=2\,\sin x\,\cos x\,\Big(\mathrm{Arcsin}\left(\sqrt{\sin^2 x}\right)-\mathrm{Arccos}\left(\sqrt{\cos^2 x}\right)\Big)\ .$$

Notons que la fonction F est paire et π-périodique puisque les fonctions φ et ψ ci-dessus sont paires et π-périodiques. Pour montrer que F est constante sur $\mathbb{R}$, il suffit donc de montrer que F est constante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Or, si $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, alors $\sin x$ et $\cos x$ sont positifs donc $\sqrt{\sin^2 x}=\sin x$, $\sqrt{\cos^2 x}=\cos x$ et

$$F'(x)=2\,\sin x\,\cos x\,\Big(\mathrm{Arcsin}(\sin x)-\mathrm{Arccos}(\cos x)\Big)\ .$$

Mais la relation $\mathrm{Arcsin}(\sin x)=x$ est vraie pour $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ tandis que la relation $\mathrm{Arccos}(\cos x)=x$ est vraie pour $x\in[0,\pi]$. Si $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a donc $F'(x)=0$. La fonction F est donc constante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Comme elle est paire et π-périodique, elle est constante sur $\mathbb{R}$. Pour calculer sa valeur, calculons $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ en utilisant la relation classique $\forall x\in[0,1]\quad \mathrm{Arccos}\,x+\mathrm{Arcsin}\,x=\dfrac{\pi}{2}$:

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^{\frac12}\mathrm{Arccos}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t+\int_0^{\frac12}\mathrm{Arcsin}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac12}\frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\ .$$

Conclusion : $\forall x\in\mathbb{R}\qquad F(x)=\dfrac{\pi}{4}$.

---

9. En utilisant une somme de Riemann, donner un équivalent de $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$.

- -

Rappelons que, si $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ est continue par morceaux, alors la somme de Riemann $R_n(f)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ tend vers l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque n tend vers $+\infty$.

En choisissant $f : x \mapsto \sqrt{x}$, on a

$$R_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}\, S_n \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\,.$$

Donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{3}\, n^{\frac{3}{2}}$.

10.a. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k}$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k^\alpha}$ avec $\alpha > 1$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

- -

a. On reconnaît une somme de Riemann puisque

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\dfrac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)$$

avec $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln(2)$.

Pour $\alpha > 1$, posons $T_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k^\alpha}$. Alors

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^\alpha}\right]$$

et l'expression entre crochets est de nouveau une somme de Riemann admettant pour limite $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^\alpha} = \frac{1-2^{1-\alpha}}{\alpha-1}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 0$. Plus précisément, $T_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1-2^{1-\alpha}}{\alpha-1}\,\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.

b. Posons $S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k}$ et $U_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\dfrac{1}{k}\right)$. On a vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln(2)$. D'autre part, on sait que $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, mais il va falloir écrire cela avec un peu plus de précision. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre deux à la fonction $f = \sin$, on a, pour tout x réel positif,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| = \left| \sin(x) - x \right| \;\le\; \frac{x^3}{3!} \max_{t\in[0,x]} \left| f^{(3)}(t) \right| \le \frac{x^3}{6}\,.$$

On en déduit que

$$|U_n - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\sin\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} \right) \right| \le \sum_{k=n+1}^{2n} \left| \sin\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} \right| \le \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{6k^3} \le n\, \frac{1}{6(n+1)^3}\,,$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n - S_n) = 0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln(2)$. *On peut aussi appliquer la question* **a.** *avec* $\alpha = 3$.

---

11. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à $f : t \mapsto \ln(1+t)$ entre 0 et 1, montrer que la série harmonique alternée a pour somme $\ln(2)$, i.e. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

- -

L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour f entre 0 et 1 (légitime car f est de classe $\mathcal{C}^\infty$) s'écrit

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (1-0)^k \right| \leq \frac{M_{n+1}\,(1-0)^{n+1}}{(n+1)!} \;, \quad \text{avec} \quad M_{n+1} = \max_{t\in[0,1]} \left| f^{(n+1)}(t) \right| .$$

On calcule les dérivées successives de f, on a $f'(t) = \dfrac{1}{1+t}$, $f''(t) = -\dfrac{1}{(1+t)^2}$ et, par une récurrence facile, $f^{(k)}(t) = (-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+t)^k}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. En particulier, on a $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, et $M_{n+1} = \max\limits_{t\in[0,1]} \left| f^{(n+1)}(t) \right| = \left| f^{(n+1)}(0) \right| = n!$ Du coup, le majorant $\dfrac{M_{n+1}\,(1-0)^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini et, par encadrement, avec $f(0) = 0$ et $f(1) = \ln(2)$, on a $\left| \ln(2) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = \ln(2)$, ce qu'il fallait démontrer.

---

12. Pour p et q entiers naturels, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_a^b (t-a)^p (b-t)^q \,\mathrm{d}t$.

a. Trouver une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

b. Exprimer $I_{p,q}$ à l'aide de factorielles.

- -

a. Une hipépé donne directement

$$I_{p,q} = \left[\frac{(t-a)^{p+1}}{p+1} (b-t)^q \right]_a^b + \frac{q}{p+1} \int_a^b (t-a)^{p+1} (b-t)^{q-1} \,\mathrm{d}t = \frac{q}{p+1} \, I_{p+1,q-1} \, .$$

b. Par une récurrence immédiate, pour tout $k \in [\![0, q]\!]$, on a

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} \, \frac{q-1}{p+2} \cdots \frac{q-k+1}{p+k} \, I_{p+k,q-k}$$

et, en particulier, pour $k = q$, on obtient

$$I_{p,q} = \frac{q(q-1)\cdots 1}{(p+1)(p+2)\cdots(p+q)} I_{p+q,0} = \frac{p!\,q!}{(p+q)!} \, I_{p+q,0} = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!} \, (b-a)^{p+q+1} \, .$$

---

13. Expliciter et représenter $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{3+\cos^2(t)}$.

- -

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{3+\cos^2 t}$ est définie et continue (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$, et F est sa primitive qui s'annule en 0. Donc F est aussi définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En posant le changement de variable $t = -u$, on peut remarquer que F est impaire.

Tant que $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on peut aussi poser dans l'intégrale définissant $F(x)$, le changement de variable $u = \tan(t)$, soit $t = \mathrm{Arctan}(u)$, on a alors $\cos^2(t) = \dfrac{1}{1+\tan^2(t)} = \dfrac{1}{1+u^2}$, et on obtient

$$F(x) = \int_0^{\tan(x)} \frac{1}{3+\dfrac{1}{1+u^2}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_0^{\tan(x)} \frac{\mathrm{d}u}{4+3u^2}\ .$$

En posant enfin $u = \dfrac{2}{\sqrt{3}}v$, on a, toujours pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$F(x) = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}\tan(x)} \frac{\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}v}{4(1+v^2)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ \mathrm{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ \tan(x)\right)\ .$$

Comme F est continue, on a $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4\sqrt{3}}$ et $F\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{4\sqrt{3}}$.

La fonction f étant π-périodique, on déduit (par exemple en dérivant) que $F(x+\pi) - F(x)$ est constant, donc

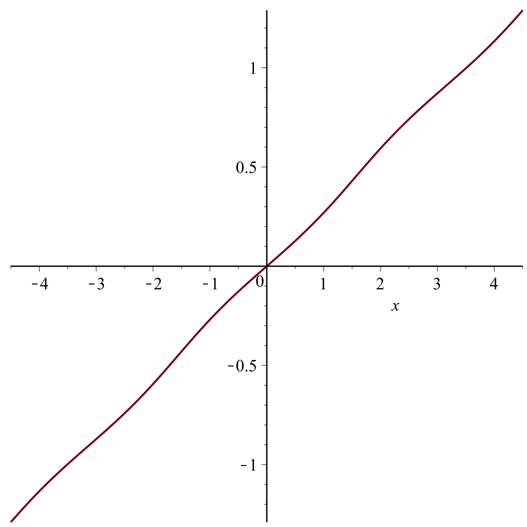
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F(x+\pi) - F(x) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\ .$$

On en déduit facilement que, pour tout k entier relatif, on a

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[\qquad F(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ \mathrm{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ \tan(x)\right) + k\ \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\ ,$$

et $F\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right) = \dfrac{\pi}{4\sqrt{3}} + k\ \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

La courbe représentative de F n'est pas très spectaculaire!



Convergence et calcul d'intégrales généralisées.

14. Quelle est la nature des intégrales généralisées suivantes ?

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}} \; ; \quad I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t \; ; \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t \; ; \quad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\mathrm{d}t \; .$$

- -

a. La fonction positive $f : t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)\sqrt{t}}$ n'est pas intégrable sur $]0,1[$. En effet, au voisinage de 1, on a $f(t) \sim \dfrac{1}{1-t}$ et cette dernière fonction n'est pas intégrable en 1 puisque $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ n'est pas intégrable en 0. L'intégrale I_1 est donc divergente.

b. Soit $f : t \mapsto e^{-t}\ \ln(t)$, alors f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$. En effet,

- sur $]0,1]$, on a $\big|f(t)\big| \leq \big|\ln(t)\big|$, et la fonction ln est intégrable sur $]0,1]$, donc f est intégrable sur $]0,1]$.

- au voisinage de $+\infty$, on a $t^2 f(t) = t^2\, e^{-t}\ \ln(t) = o(t^3\, e^{-t})$ et cette expression tend vers 0 par croissances comparées, donc $f(t) = o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ en $+\infty$, ce qui entraîne l'intégrabilité de f sur $[1,+\infty[$.

L'intégrale I_2 est donc (absolument) convergente.

c. Soit $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2+1}$, alors f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$. En effet,

- sur $]0,1]$, on a $\big|f(t)\big| \leq \big|\ln(t)\big|$, et la fonction ln est intégrable en 0, donc f est intégrable en 0.

- au voisinage de $+\infty$, on a $t^{3/2}\, f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $f(t) = o\Big(\dfrac{1}{t^{3/2}}\Big)$ en $+\infty$ d'où l'intégrabilité de f en $+\infty$.

L'intégrale I_3 est donc (absolument) convergente.

d. Soit $f : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}$, alors f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$. En effet,

- on a $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et cette dernière fonction est intégrable sur $]0, 1]$, donc f est intégrable sur $]0, 1]$.

- au voisinage de $+\infty$, on a $t^{5/4}\, f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t^{1/4}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $f(t) = o\Big(\dfrac{1}{t^{5/4}}\Big)$ en $+\infty$ d'où l'intégrabilité de f sur $[1, +\infty[$.

L'intégrale I_4 est donc convergente.

---

15. Intégrales de Bertrand.

Étudier la nature de l'intégrale $I_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\,(\ln t)^\beta}$, avec α et β deux réels.

- -

Posons $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha\,(\ln t)^\beta}$ pour $t \in [e, +\infty[$.

• Supposons $\alpha > 1$. Soit γ un réel tel que $1 < \gamma < \alpha$. Par croissances comparées, on a alors $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\gamma\, f(t) = 0$, soit $f(t) = o\Big(\dfrac{1}{t^\gamma}\Big)$ lorsque $t \to +\infty$. Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, puisque l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\gamma}$ converge, on déduit la convergence de l'intégrale $I_{\alpha,\beta}$.

• Supposons $\alpha = 1$. Pour tout $x \in [e, +\infty[$, on a alors

$$F(x) = \int_e^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{t\,(\ln t)^\beta} = \begin{cases} \ln(\ln x) & \text{si} \quad \beta = 1 \\ \dfrac{(\ln x)^{1-\beta} - 1}{1-\beta} & \text{si} \quad \beta \neq 1 \end{cases}.$$

On constate que cette intégrale partielle admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si $\beta > 1$.

• Supposons $\alpha < 1$. On constate alors que $\dfrac{1}{t\,f(t)} = t^{\alpha-1}\,(\ln t)^\beta \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui peut se traduire par $\dfrac{1}{t} = o\big(f(t)\big)$ en $+\infty$. L'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ étant divergente, on déduit la divergence de l'intégrale $I_{\alpha,\beta}$.

Bilan. L'intégrale de Bertrand $I_{\alpha,\beta}$ converge si et seulement si $(\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.

---

16. Montrer la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^{\frac{3}{2}} - 1}\,\mathrm{d}t$.

- -

C'est une intégrale "quadruplement généralisée" puisque la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^{\frac{3}{2}} - 1}$ est continue sur les intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$, et a priori non définie au point 1. Mais en fait, on a $\ln t \underset{t\to 1}{\sim} t-1$, et en posant $t = 1+h$ avec $h \to 0$, on voit que

$$t^{\frac{3}{2}} - 1 = (1+h)^{\frac{3}{2}} - 1 \sim \frac{3}{2}h = \frac{3}{2}(t-1)\ .$$

Finalement, la fonction f est prolongeable en une fonction continue sur $]0,+\infty[$ en posant $f(1) = \dfrac{2}{3}$.

Au voisinage de 0, on a $f(t) \sim -\ln t = |\ln t|$, fonction réputée intégrable sur $]0,1]$, donc f est intégrable sur $]0,1]$.

Au voisinage de $+\infty$, on a $f(t) \sim \dfrac{\ln(t)}{t^{\frac{3}{2}}}$, mais $\ln t = o\Big(t^{\frac{1}{4}}\Big)$ par les résultats classiques de croissances comparées, donc $f(t) = o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{5}{4}}}\right)$, avec $\dfrac{5}{4} > 1$, donc f est aussi intégrable sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

---

17. Convergence et calcul des intégrales généralisées suivantes:

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}(t)}\ ;\quad I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\ ;\quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\ ;\quad I_4 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t\ .$$

- -

a. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}(t)}$ est définie et continue sur $[1,+\infty[$, et $f(t) = \dfrac{2}{e^t - e^{-t}}$, on a donc $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} 2e^{-t}$. Comme $t \mapsto 2e^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, la fonction f l'est aussi.

Pour le calcul, on pose $u = e^t$, on a alors

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{e^t - e^{-t}} = 2\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} = \int_e^{+\infty} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u = \left[\ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right)\right]_e^{+\infty}\ ,$$

donc $I_1 = \ln\left(\dfrac{e+1}{e-1}\right)$.

b. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ est définie et continue sur $]0,1]$, et on a $t^{3/4} f(t) = t^{1/4}\ln(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, donc $f(t) = o\Big(\dfrac{1}{t^{3/4}}\Big)$ au voisinage. Comme $\dfrac{3}{4} < 1$, cette dernière fonction (de type Riemann) est intégrable sur $]0,1]$, donc f est aussi intégrable sur $]0,1]$ par comparaison.

Pour le calcul, on pose $u = \sqrt{t}$, on a alors

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2\ln(u)}{u}\,2u\,\mathrm{d}u = 4\int_0^1 \ln(u)\,\mathrm{d}u = -4\ .$$

c. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$. On a $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, ce qui entraîne l'intégrabilité de f sur $]0,1]$. De plus, $t^{3/2}\,f(t) = t\,e^{-\sqrt{t}} = e^{\ln(t)-\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $f(t) = o\Big(\dfrac{1}{t^{3/2}}\Big)$ au voisinage de $+\infty$, ce qui entraîne l'intégrabilité de f sur $[1,+\infty[$.

Pour le calcul, on pose $u = \sqrt{t}$, on a alors

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,2u\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u = 2\;.$$

d. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}$ est définie et continue sur $]0,1[$. On a $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$ d'où l'intégrabilité de f sur $\left]0,\dfrac{1}{2}\right]$, et f est prolongeable par continuité au point 1, puisque $f(t) \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{t-1}{\sqrt{1-t}} = -\sqrt{1-t}$, donc $\lim\limits_{t\to 1^-} f(t) = 0$. Donc f est intégrable sur $]0,1[$.

Pour le calcul, on pose $u = \sqrt{1-t}$, on a alors

$$I_4 = \int_1^0 \frac{\ln(1-u^2)}{u}\,(-2u)\,\mathrm{d}u = 2\int_0^1 \big(\ln(1+u)+\ln(1-u)\big)\,\mathrm{d}u = 2\int_0^2 \ln(u)\,\mathrm{d}u = 4\,\ln(2)-4$$

après quelques transformations d'écriture laissées au vaillant lecteur.

---

18. Convergence et calcul des intégrales généralisées suivantes:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}\ ;\ I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(e^t+1)(e^{-t}+1)}\ ;\ I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t\ ;\ I_4 = \int_0^{+\infty} \ln\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)\mathrm{d}t\;.$$

- -

a. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{(t+1)(t+2)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$, et on a $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$, cela garantit la convergence de l'intégrale I_1. Ensuite, on décompose en éléments simples: $f(t) = \dfrac{1}{t+1} - \dfrac{1}{t+2}$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$ est donc $F : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$. Finalement, $I_1 = \big[F(x)\big]_0^{+\infty} = \ln(2)$.

b. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{(e^t+1)(e^{-t}+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$, et on a $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t}$, cela garantit la convergence de l'intégrale I_2. Le changement de variable $u = e^t$ (la fonction $t \mapsto e^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement croissante de $[0,+\infty[$ vers $[1,+\infty[$) donne

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\,(u+1)\left(\dfrac{1}{u}+1\right)} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2} = \frac{1}{2}\;.$$

c. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{(1+t)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$, et on a $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$, la fonction ln étant réputée intégrable sur $]0,1]$, on en déduit déjà l'intégrabilité de f sur $]0,1]$. Au voisinage de $+\infty$, on a $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t^2}$, donc $t^{\frac{3}{2}} f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui entraîne l'intégrabilité de f sur $[1,+\infty[$ par comparaison aux fonctions de type Riemann. Tout cela prouve la convergence de l'intégrale I_3. Une astuce permet de calculer I_3. En effet, le changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$ donne

$$I_3 = \int_{+\infty}^{0} \frac{\ln \dfrac{1}{u}}{\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^2} \left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{-\ln(u)}{(u+1)^2}\,\mathrm{d}u = -I_3 \ ,$$

donc $I_3 = 0$.

d. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est bijective, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissante, de $]0,+\infty[$ vers lui-même. L'intégrale I_4 est donc de même nature (et a même valeur en cas de convergence) que l'intégrale $J_4 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+u^2)}{u^2}\,\mathrm{d}u$. La fonction $g : u \mapsto \dfrac{\ln(1+u^2)}{u^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 avec $g(0) = 1$, et au voisinage de $+\infty$ on a $g(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(u)}{u^2} = o\Big(\dfrac{1}{u^{3/2}}\Big)$ par croissances comparées, donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où la convergence de l'intégrale J_4 et celle de I_4. On calcule J_4 par une hipépé (la fonction entre crochets a des limites nulles aux bornes):

$$I_4 = J_4 = \left[-\frac{1}{u}\ \ln(1+u^2)\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = 0 + 2\times\frac{\pi}{2} = \pi \ .$$

---

19. Calculer $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, avec $a < b$. *On pourra poser* $x = \dfrac{a+b}{2} + t$.

- -

Posons $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ pour $x \in]a,b[$. Lorsque $x \to a$, on a $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{b-a}}\dfrac{1}{\sqrt{x-a}}$.
On sait que $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,\alpha]$ avec $\alpha > 0$, on en déduit (en faisant une translation de la variable, c'est-à-dire en posant $t = x-a$) que $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-a}}$ est intégrable sur $]a,a+\alpha]$. Donc f est intégrable sur $]a,c]$ avec par exemple $c = \dfrac{a+b}{2}$. On montre de même que f est intégrable sur $[c,b[$. Finalement, f est intégrable sur $]a,b[$.
On met le trinôme sous forme canonique :

$$(x-a)(b-x) = -\big[x^2 - (a+b)x + ab\big] = -\left[\Big(x - \frac{a+b}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{b-a}{2}\Big)^2\right] .$$

On pose alors le changement de variable affine $x-\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{b-a}{2}u$ pour rechercher une primitive F de f sur $]a,b[$ (*un calcul d'intégrale sans borne est sans doute ici plus pratique. Pour respecter les indications de l'énoncé, on peut procéder en deux temps: d'abord poser* $x=\dfrac{a+b}{2}+t$, *puis poser* $t=\dfrac{b-a}{2}u$) :

$$\begin{aligned}F(x) &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}\\ &= \operatorname{Arcsin} u = \operatorname{Arcsin}\left[\frac{2}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

Enfin $I=\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\lim_{x\to b^-}F(x)-\lim_{x\to a^+}F(x)=\pi.$

---

20. Convergence et calcul de $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^3\ \ln x}{(1+x^4)^3}\,\mathrm{d}x.$

- -

a. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^3\ \ln x}{(1+x^4)^3}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f est prolongeable par continuité en 0 puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)=0$. Au voisinage de $+\infty$, on a $f(x)\sim\dfrac{\ln x}{x^9}$, donc $f(x)=o\!\left(\dfrac{1}{x^8}\right)$, ce qui garantit largement l'intégrabilité de f sur $[1,+\infty[$, donc finalement sur $]0,+\infty[$.

b. Pour le calcul, posons d'abord $u=x^4$, ainsi $I=\dfrac{1}{16}J$, avec $J=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln u\,\mathrm{d}u}{(1+u)^3}$. Pour calculer J, on va procéder à une intégration par parties, mais en y allant prudemment car les deux termes obtenus sont divergents en 0. Posons donc, pour $a>0$, $J_a=\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\ln u\,\mathrm{d}u}{(1+u)^3}$. On a alors

$$\begin{aligned}J_a &= \left[-\frac{\ln u}{2(1+u)^2}\right]_a^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)^2}\\ &= \frac{\ln a}{2(1+a)^2}+\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{(1+u)^2}-\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u\\ &= \frac{\ln a}{2(1+a)^2}-\frac{1}{2}\ln a-\frac{1}{2(1+a)}+\frac{1}{2}\ln(1+a)\\ &= -\frac{(a+2)\ a\ \ln a}{2(1+a)^2}-\frac{1}{2(1+a)}+\frac{1}{2}\ln(1+a)\quad\underset{a\to 0}{\longrightarrow}\quad -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Donc $J=-\dfrac{1}{2}$, puis $I=-\dfrac{1}{32}$.

---

21. Soient les intégrales généralisées $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$.

a. Montrer leur convergence.

b. Calculer J.

c. Factoriser, dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P = X^4 + 1$.

d. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$, puis la calculer.

- -

a. Les fonctions $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^4}$ et $g : t \mapsto \dfrac{t}{1+t^4}$ sont continues sur $[0, +\infty[$, et on a les équivalents $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^4}$ et $g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$, d'où l'on déduit leur intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$.

b. En posant $u = t^2$, on a $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{4}$.

c. $X^4 + 1 = (X^2+1)^2 - 2X^2 = (X^2+1)^2 - (X\sqrt{2})^2 = (X^2 - X\sqrt{2} + 1)(X^2 + X\sqrt{2} + 1)$.
Le polynôme X^4+1 n'a visiblement pas de racine réelle (pour tout x réel, on a $x^4+1>0$), sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est donc constituée de deux facteurs du second degré sans racine réelle (i.e. de discriminant strictement négatif).

d. Le changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$ donne $I = \displaystyle\int_{+\infty}^{0} -\frac{1}{1+\frac{1}{u^4}}\,\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{1+u^4}$.

De la question **c.**, on déduit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 - t\sqrt{2}+1)(t^2+t\sqrt{2}+1)}$, donc

$$\begin{aligned}
I - \sqrt{2}\,J + I &= \int_0^{+\infty} \frac{(t^2 - t\sqrt{2}+1)\,\mathrm{d}t}{(t^2 - t\sqrt{2}+1)(t^2+t\sqrt{2}+1)} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t\sqrt{2}+1} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \qquad \textit{(mise sous forme canonique du trinôme)} \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}u}{\frac{1}{2}\,(u^2+1)} \qquad \left(\textit{on pose } t + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,u\right) \\
&= \sqrt{2}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\
&= \sqrt{2}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}$$

Connaissant J, on déduit $I = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

22. On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que ces intégrales sont convergentes et que $I = J$.

b. Calculer $I + J$. En déduire I et J.

- -

a. La fonction $f : t \mapsto \ln(\sin t)$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et, au voisinage de 0, on a $\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t$, ce qui peut écrire $\sin(t) = t\,\big(1+\varepsilon(t)\big)$ avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$, donc

$$\ln(\sin t) = \ln(t) + \ln\big(1+\varepsilon(t)\big) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)\ ,$$

le second terme (de limite nulle) étant négligeable devant le premier (de limite infinie). La fonction ln étant intégrable sur $]0,1]$ ou sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on en déduit l'intégrabilité de f sur ce même intervalle, donc la convergence de l'intégrale I. Le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - x$ montre que les intégrales I et J sont de même nature et sont égales en cas de convergence. Donc l'intégrale J converge et $J = I$.

b. On a

$$2I = I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t\ \cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\ \sin(2t)\right)\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ \ln(2) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2t)\,\mathrm{d}t\ ,$$

Or, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(I + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u\right)$ par le changement de variable $u = 2t$ puis la relation de Chasles. Enfin, en posant $v = \pi - u$, on a

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln\big(\sin(\pi - v)\big)\,(-\mathrm{d}v) = I$$

puisque $\sin(\pi - v) = \sin(v)$. Finalement, on a obtenu $2I = -\dfrac{\pi}{2}\ \ln(2) + I$, donc

$$I = J = -\frac{\pi}{2}\ \ln(2)\ .$$

---

23. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continue, telle que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ soit convergente. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

a. Pour $x > 0$, montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

b*. En déduire convergence et valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t$.

- -

a. Les intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(at)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t$ sont convergentes puisqu'elles se ramènent aux intégrales $\displaystyle\int_{ax}^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_{bx}^{+\infty} \frac{f(v)}{v}\,\mathrm{d}v$ par les changements de variable $u = at$ et

$v = bt$. Puis

$$\begin{aligned}
\int_x^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_x^{+\infty} \frac{f(at)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_x^{+\infty} \frac{f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{ax}^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{bx}^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u \qquad (\textit{relation de Chasles}).
\end{aligned}$$

b. La continuité de f en 0 permet d'écrire $f(t) = f(0) + \varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$. On a donc, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_x^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{ax}^{bx} \frac{f(0)}{u}\,\mathrm{d}u + \int_{ax}^{bx} \frac{\varepsilon(u)}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= f(0)\,\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \int_{ax}^{bx} \frac{\varepsilon(u)}{u}\,\mathrm{d}u\,.
\end{aligned}$$

Or, $\left| \int_{ax}^{bx} \frac{\varepsilon(u)}{u}\,\mathrm{d}u \right| \leq \int_{ax}^{bx} \frac{\left|\varepsilon(u)\right|}{u}\,\mathrm{d}u \leq \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \max\limits_{u\in[ax,bx]} \left|\varepsilon(u)\right|$. Or, $\lim\limits_{x\to 0} \left(\max\limits_{u\in[ax,bx]} \left|\varepsilon(u)\right| \right) = 0$ (*revenir à la définition de la limite pour s'en persuader!*), on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \int_x^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t = f(0)\,\ln\left(\frac{b}{a}\right)$, ce qui montre la convergence de l'intégrale proposée et fournit la relation $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t = f(0)\,\ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

---

24. Convergence et, le cas échéant, calcul de $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{t} + a\,\sqrt{t+1} + b\,\sqrt{t+2}\right)\mathrm{d}t$.

- -

La fonction $f : t \mapsto \sqrt{t} + a\,\sqrt{t+1} + b\,\sqrt{t+2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, cherchons-en un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sqrt{t}\left(1 + a\sqrt{1+\frac{1}{t}} + b\sqrt{1+\frac{2}{t}}\right) \\
&= \sqrt{t}\left[1 + a\left(1 + \frac{1}{2t} + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\right) + b\left(1 + \frac{1}{t} + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\right)\right] \\
&= (1+a+b)\,\sqrt{t} + \left(\frac{a}{2} + b\right)\frac{1}{\sqrt{t}} + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit la discussion suivante:

- si $a + b + 1 \neq 0$, alors $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} C\,\sqrt{t}$, où C est une constante non nulle, donc l'intégrale proposée est divergente ;

- si $a+b+1=0$ et $\dfrac{a}{2}+b\neq 0$, alors $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{D}{\sqrt{t}}$, où D est une constante non nulle, donc l'intégrale proposée est de nouveau divergente puisque $t\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$;

- si $a+b+1=0$ et $\dfrac{a}{2}+b=0$, alors $f(t)=O\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ au voisinage de $+\infty$, et f est alors intégrable sur $[0,+\infty[$.

Bilan. L'intégrale proposée converge si et seulement si $a+b+1=0$ et $\dfrac{a}{2}+b=0$, i.e. si et seulement si $a=-2$ et $b=1$.

On doit donc maintenant calculer

$$\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{t}-2\sqrt{t+1}+\sqrt{t+2}\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\left[t^{3/2}-2\,(t+1)^{3/2}+(t+2)^{3/2}\right]_0^{+\infty}.$$

De nouveau par des développements asymptotiques,

$$\begin{aligned} t^{3/2}-2\,(t+1)^{3/2}+(t+2)^{3/2} &= t^{3/2}\left(1-2\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3/2}+\left(1+\frac{2}{t}\right)^{3/2}\right)\\ &= t^{3/2}\left[1-2\left(1+\frac{3}{2t}+O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\right)+\left(1+\frac{3}{t}+O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\right)\right]\\ &= O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0\,. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à évaluer en 0 pour conclure que

$$\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{t}-2\sqrt{t+1}+\sqrt{t+2}\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\left(2-2^{3/2}\right)=\frac{4}{3}\,(1-\sqrt{2})\,.$$

Intégrabilité.

25. Montrer que les fonctions $f:x\mapsto \dfrac{\ln x}{x^2+1}$ et $g:x\mapsto\dfrac{\ln x}{x^2+4}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer leurs intégrales sur $]0,+\infty[$ sans passer par un calcul de primitive.

- -

• Pour l'intégrabilité sur $]0,1]$, on a $|f(x)|\sim|\ln x|$ et $|g(x)|\sim\dfrac{1}{4}\,|\ln x|$ au voisinage de zéro, la fonction ln étant intégrable sur $]0,1]$, donc f et g sont aussi intégrables sur cet intervalle.

• Pour l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$, utilisons le fait que $\ln x=o(\sqrt{x})$ au voisinage de $+\infty$, on en déduit que $f(x)$ et $g(x)$ sont tous deux négligeables devant $\dfrac{1}{x^{3/2}}$ lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x^{3/2}}$ étant intégrable sur $[1,+\infty[$, donc f et g sont aussi intégrables sur cet intervalle.

• En posant $x = \dfrac{1}{t}$, on a

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_{+\infty}^1 \frac{-\ln t}{\dfrac{1}{t^2}+1}\Big(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\Big) = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\ ,$$

donc, en ajoutant les deux, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} f = 0$.

• En posant $x = 2u$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(2u)}{4(u^2+1)}\,2\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u + \frac{\ln 2}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}\ ,\end{aligned}$$

soit $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} g = \frac{\pi\ \ln 2}{4}$.

---

26. Soit α un réel tel que $0 < \alpha < 2$.

a. Montrer la convergence de l'intégrale généralisée $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

b. Montrer les inégalités $0 \leq I_\alpha \leq \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

- -

a. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

• Au voisinage de 0, on a $f(t) \sim \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$, avec $\alpha - 1 < 2$, ce qui assure l'intégrabilité sur $]0,1]$.

• Montrons maintenant la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ (ce qui est moins fort que l'intégrabilité de f sur $[1, +\infty[$, cette dernière propriété n'étant pas forcément vraie ici) : il suffit pour cela de montrer que l'intégrale partielle $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Pour cela, on intègre par parties :

$$F(x) = \frac{\cos x}{x^\alpha} - \cos 1 - \alpha \int_1^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t\ .$$

On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} = 0$, et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente (puisque l'intégrande est majoré en valeur absolue par $\dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$, intégrable sur $[1, +\infty[$ étant donné que $\alpha + 1 > 1$), donc convergente, ce qui assure l'existence d'une limite finie pour l'intégrale partielle $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$.

b. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $J_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$. L'intégrande étant du signe de $(-1)^k$ sur l'intervalle $[k\pi, (k+1)\pi]$, l'intégrale J_k est elle-même du signe de $(-1)^k$, et $|J_k| = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$. La suite $(|J_k|)$ est strictement décroissante et tend vers zéro : en effet, par une translation de la variable, on a

$$|J_{k+1}| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(t+\pi)^\alpha}\,\mathrm{d}t < \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = |J_k|$$

puisque $\dfrac{|\sin t|}{(t+\pi)^\alpha} \leq \dfrac{|\sin t|}{t^\alpha}$ sur l'intervalle $[k\pi, (k+1)\pi]$, l'inégalité étant stricte sur l'intervalle ouvert. De plus,

$$|J_k| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(k\pi)^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(k\pi)^\alpha} \int_0^\pi |\sin t|\,\mathrm{d}t \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$

Or, $I_\alpha = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} J_k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k |J_k|$, le critère spécial des séries alternées permet donc d'affirmer que, pour tout $n \geq -1$, le reste d'ordre n, noté r_n, est de même signe (strictement) que "le premier terme négligé". Ainsi, $r_{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} J_k = I_\alpha$ est du signe de J_0, donc strictement positif, ce qui donne $0 < I_\alpha$. De même, $r_0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} J_k = I_\alpha - J_0$ est du signe de J_1, donc strictement négatif, ce qui donne $I_\alpha < J_0$; on a donc obtenu l'encadrement demandé.

27.a. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ (*sinus cardinal*) n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, mais que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ est semi-convergente.

b. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\,\sin\lambda t\,\mathrm{d}t = 0$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ et $K_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que la suite (J_n) est constante, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(J_n - K_n) = 0$, et en déduire que $I = \dfrac{\pi}{2}$.

d. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

- -

a. Vu en cours.

b. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut intégrer par parties, cela donne, pour $\lambda > 0$,

$$\int_a^b f(t)\,\sin\lambda t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\left(f(a)\,\cos(\lambda a) - f(b)\,\cos(\lambda b) + \int_a^b f'(t)\,\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right)\ .$$

Avec, en vrac, l'inégalité triangulaire, la majoration de la valeur absolue d'une intégrale par l'intégrale de la valeur absolue, le fait que $|\cos| \leq 1$, on a $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\ \sin\lambda t\ \mathrm{d}t\right| \leq \dfrac{K}{\lambda}$, où K est une constante (indépendant de λ), par exemple $K = 2\|f\|_\infty + (b-a)\ \|f'\|_\infty$. On en déduit que cette intégrale (dépendant du paramètre λ) tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$.

c. Les intégrales J_n et K_n sont "faussement généralisées" en 0, puisque les intégrandes sont prolongeables par continuité en ce point. On a

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+3)t - \sin(2n+1)t}{\sin t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\ \cos(2n+2)t\ \mathrm{d}t = 0$$

en utilisant la relation $\sin(p) - \sin(q) = 2\ \cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\ \sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$. La suite (J_n) est donc constante, donc pour tout n entier naturel, $J_n = J_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Ensuite,

$$J_n - K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t - \sin t}{t\ \sin t}\ \sin(2n+1)t\ \mathrm{d}t\ ,$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(J_n - K_n) = 0$ par la question **b.** Notons que, pour appliquer cette question **b.**, il faut montrer que la fonction $f : t \mapsto \dfrac{t - \sin t}{t\ \sin t}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le **segment** $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ce qui nécessite une étude locale en zéro... qui est laissée au vaillant lecteur! *Ce prolongement doit vérfier* $f(0) = 0$ *et* $f'(0) = \dfrac{1}{6}$, *sinon vous recommencez vos calculs!* On en déduit alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K_n = \lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$, mais par ailleurs, un changement de variable tout simple donne $K_n = \displaystyle\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x$ (intégrale partielle liée à l'intégrale généralisée I), on a donc aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K_n = I$. Finalement, $I = \dfrac{\pi}{2}$.

d. La fonction $g : t \mapsto \left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car elle est prolongeable par continuité en zéro, et qu'elle est $O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$. Une intégration par parties (justifiée car l'expression entre crochets admet des limites finies en 0 et en $+\infty$) donne

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t &= \left[-\frac{\sin^2 t}{t}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin t\ \cos t}{t}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ .\end{aligned}$$

---

28. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(e^t)\ \mathrm{d}t$ est convergente.

- -

La fonction $f : t \mapsto \sin(e^t)$ est continue sur $[0,+\infty[$. Écrivons une intégrale partielle, et intégrons par parties:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sin(e^t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x e^{-t}\cdot e^t \sin(e^t)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[-e^{-t}\,\cos(e^t)\Big]_0^x - \int_0^x e^{-t}\,\cos(e^t)\,\mathrm{d}t \\
&= \cos(1) - e^{-x}\,\cos(e^x) - \int_0^x e^{-t}\,\cos(e^t)\,\mathrm{d}t\ .
\end{aligned}$$

Comme $\left|e^{-x}\,\cos(e^x)\right| \leq e^{-x}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\,\cos(e^x) = 0$. La même majoration de la valeur absolue montre que la fonction $t \mapsto e^{-t}\,\cos(e^t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\cos(e^t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. Ainsi, l'intégrale partielle $\displaystyle\int_0^x \sin(e^t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, ce qui est la définition de la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(e^t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque. On peut montrer que cette intégrale n'est pas absolument convergente, autrement dit la fonction f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$. L'insatiable lecteur vérifiera en effet que le changement de variable $u = e^t$ transforme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\sin(e^t)\right|\,\mathrm{d}t$ en l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(u)}{u}\right|\,\mathrm{d}u$, qui est divergente, c'est bien connu.

---

29. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$. *On commencera par linéariser* $\sin^3 x$ *puis on essaiera de décomposer en une somme de deux intégrales.*

- -

Tout d'abord, cette intégrale impropre est convergente : la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin^3 x}{x^2}$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ d'où l'intégrabilité de f sur $]0,1]$, et la majoration $|f(x)| \leq \dfrac{1}{x^2}$ prouve l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$.

On linéarise : $\sin^3 x = \dfrac{1}{4}\,(3\,\sin x - \sin 3x)$ (*calcul laissé au lecteur*).

On serait tenté d'écrire $I = \dfrac{3}{4}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x^2}\,\mathrm{d}x$, MAIS... ces deux intégrales impropres sont divergentes (à cause de la borne 0, pas de problème d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$).

On écrira donc $I = \lim\limits_{a\to 0} I_a$, avec $I_a = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$, puis

$$I_a \;=\; \frac{3}{4}\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_a^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{4}\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{3}{4}\int_{3a}^{+\infty}\frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{3}{4}\int_a^{3a}\frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

(on a posé $u = 3x$ dans la deuxième intégrale).

Au voisinage de zéro, on a $\sin u = u + o(u^2)$, donc $\dfrac{\sin u}{u^2} = \dfrac{1}{u} + r(u)$, la fonction $r(u)$ étant un "$o(1)$" au voisinage de zéro: cela signifie que $\lim\limits_{u\to 0} r(u) = 0$ et cela entraîne notamment que la fonction r est bornée au voisinage de zéro, posons donc $|r(u)| \leq M$ pour u proche de 0.

Alors $I_a = \dfrac{3}{4}\displaystyle\int_a^{3a}\frac{\mathrm{d}u}{u} + \frac{3}{4}\int_a^{3a} r(u)\,\mathrm{d}u = \frac{3}{4}\ln 3 + \frac{3}{4}\int_a^{3a} r(u)\,\mathrm{d}u$. Or,

$$\left|\int_a^{3a} r(u)\,\mathrm{d}u\right| \leq \int_a^{3a}|r(u)|\,\mathrm{d}u \leq M(3a-a) = 2aM$$

et, en particulier, $\lim\limits_{a\to 0}\displaystyle\int_a^{3a} r(u)\,\mathrm{d}u = 0$. Finalement, $I = \lim\limits_{a\to 0} I_a = \dfrac{3}{4}\ln 3$.

---

30. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

- -

Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction f' étant supposée intégrable sur $\mathbb{R}_+$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. Donc f admet une limite finie en $+\infty$, à savoir $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t$, notons-la l.

Supposons $l \neq 0$, on aurait $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} l$ et la fonction constante de valeur l n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$ alors que f l'est, on a donc une contradiction. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

---

31. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

a. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

b. Montrer que ff' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

- -

a. Comme f' est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut écrire $f'(x) = f'(0) + \displaystyle\int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Comme f'' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f''(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, donc $f'(x)$ admet une limite finie l lorsque x tend vers $+\infty$. Il reste à montrer que $l = 0$.

Si on avait $l > 0$, alors il existerait $A > 0$ tel que, pour tout $t \geq A$, on ait $f'(t) \geq \dfrac{l}{2}$. Pour tout réel x supérieur à A, on pourrait écrire

$$f(x) = f(0) + \int_0^A f'(t)\,\mathrm{d}t + \int_A^x f'(t)\,\mathrm{d}t \geq f(0) + \int_0^A f'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{l}{2}(x - A) = \frac{l}{2}x + B\ ,$$

où B est une constante. La fonction affine $x \mapsto \dfrac{l}{2}x + B$ est positive (pour x assez grand), et elle n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par comparaison, la fonction f ne serait pas non plus intégrable sur $\mathbb{R}_+$, ce qui est une contradiction. On obtient une contradiction analogue si on suppose $l < 0$. On a donc $l = \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

b. La fonction ff' est continue sur $[0, +\infty[$ et, au voisinage de $+\infty$, on a $f(x)f'(x) = o\big(f(x)\big)$ d'après la question précédente, avec f supposée intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par comparaison, on déduit que ff' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

---

32. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f(0) = 0$. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^x \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t \leq 2 \int_0^x \frac{f(t)\,f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t\ ,$$

après avoir prouvé la convergence des intégrales considérées.

- -

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $f(0) = 0$, elle admet en 0 le développement limité à l'ordre un: $f(t) = f'(0) \cdot t + o(t)$. Ainsi, $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t)}{t} = f'(0)$. Les fonctions $g : t \mapsto \left(\dfrac{f(t)}{t}\right)^2$ et $h : t \mapsto \dfrac{f(t)\,f'(t)}{t}$ sont toutes deux continues sur $]0, x]$ pour tout $x > 0$, et prolongeables par continuité en 0 en posant $g(0) = h(0) = \big(f'(0)\big)^2$. Les intégrales considérées sont donc toutes deux "faussement généralisées".

Une intégration par parties donne alors

$$\int_0^x \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^x f(t)^2\,\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{f(t)^2}{t}\Big]_0^x + \int_0^x \frac{2\,f(t)\,f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t\ .$$

Cette i.p.p. est justifiée par le fait que le terme entre crochets admet une limite (nulle) en 0. Le crochet vaut finalement $-\dfrac{f(x)^2}{x}$, il est négatif, ce qui fournit l'inégalité demandée.

33.a. Montrer que $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b*. Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $F(x) \sim \dfrac{2}{\pi} \ln x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- -

a. L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ est divergente ; pour le montrer, il suffit de prouver que les "intégrales partielles" ne sont pas majorées, c'est-à-dire que la fonction F introduite à la question suivante n'est pas majorée sur $\mathbb{R}_+$. Remarquons que l'intégrale est "faussement impropre" en 0 puisque $\lim_{t\to 0} \dfrac{|\sin t|}{t} = 1$ (fonction prolongeable par continuité). Pour cela, pour k entier naturel, on minore $I_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$: comme $\dfrac{1}{t} \geq \dfrac{1}{(k+1)\pi}$ sur l'intervalle considéré, on a

$$I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = \frac{2}{(k+1)\pi}\ .$$

Donc, par la relation de Chasles, $F(n\pi) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} I_k \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi}\, H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On a noté comme d'habitude H_n la somme partielle d'ordre n de la série harmonique : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et on sait effectivement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$ (somme partielle d'une série divergente à termes positifs). Rappelons aussi que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge (*intégrale de Dirichlet*), cela se prouve par une i.p.p., mais on vient de prouver qu'elle n'est pas absolument convergente, elle est donc "semi-convergente".

b. Reprenons les notations introduites à la question précédente : on a $\dfrac{2}{(k+1)\pi} \leq I_k \leq \dfrac{2}{k\pi}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité de gauche étant valable aussi pour $k = 0$. En sommant, on obtient, pour tout n entier naturel non nul :

$$\frac{2}{\pi}\, H_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi} \leq F(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} I_k = I_0 + \sum_{k=1}^{n-1} I_k \leq I_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k\pi} = I_0 + \frac{2}{\pi}\, H_{n-1}\ .$$

Or, on sait que $H_n \sim \ln n$ (résultat classique, on peut le retrouver par une comparaison série-intégrale), et $H_{n-1} \sim \ln(n-1) \sim \ln n$, donc par encadrement **(*)** : $F(n\pi) \sim \dfrac{2}{\pi} \ln n$ lorsque l'entier n tend vers l'infini. Soit maintenant x un réel strictement positif, on a l'encadrement $\pi \left\lfloor \dfrac{x}{\pi} \right\rfloor \leq x < \pi \left(1 + \left\lfloor \dfrac{x}{\pi} \right\rfloor\right)$ et, comme la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (primitive d'une fonction continue positive), on a $F\left(\pi \left\lfloor \dfrac{x}{\pi} \right\rfloor\right) \leq F(x) \leq F\left(\pi \left(1 + \left\lfloor \dfrac{x}{\pi} \right\rfloor\right)\right)$, et le minorant et le majorant sont tous deux équivalents à $\dfrac{2}{\pi} \ln x$ lorsque x tend vers l'infini. Détaillons par exemple pour le minorant : on a, d'après **(*)**, $F\left(\pi \left\lfloor \dfrac{x}{\pi} \right\rfloor\right) \sim \dfrac{2}{\pi} \ln\left(\left\lfloor \dfrac{x}{\pi} \right\rfloor\right)$, et on peut écrire

$$\left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor = \frac{x}{\pi}\big(1 + r(x)\big)\ , \quad \text{avec} \quad r(x) = \frac{\pi}{x} \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0\ ,$$

donc $\ln\left(\left\lfloor \dfrac{x}{\pi} \right\rfloor\right) = \ln x - \ln \pi + \ln\big(1 + r(x)\big) \sim \ln x$ lorsque $x \to +\infty$ puisque les autres termes sont manifestement négligeables devant $\ln x$ au voisinage de $+\infty$.

Finalement, par encadrement, $F(x) \sim \dfrac{2}{\pi}\,\ln x$ lorsque x tend vers l'infini.

34*. Existence et calcul de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$.

- -

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ si $t \neq 0$ et $h(0) = 1$. Cette fonction (appelée "sinus cardinal") est continue sur $\mathbb{R}$ puisque $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$. *Elle est même de classe $\mathcal{C}^\infty$ car on montre facilement qu'elle est développable en série entière sur* $\mathbb{R}$. Par ailleurs, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente. *Elle est semi-convergente, on montre classiquement par une i.p.p. que les intégrales partielles $\displaystyle\int_1^x\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ admettent une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.* Cela a alors un sens de poser $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ pour tout x réel, et la fonction f ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $f'(x) = -\dfrac{\sin x}{x}$. *En effet, en posant $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, on a $f(x) = I - \displaystyle\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$ et on applique le théorème fondamental de l'analyse. Certains savent peut-être aussi que $I = \dfrac{\pi}{2}$ et que cette intégrale s'appelle intégrale de Dirichlet, mais ce n'est pas utile pour traiter l'exercice.*

Bref, intéressons-nous maintenant à une intégrale partielle $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ avec $x > 0$.

Une i.p.p., avec $u' = 1$ et $v = f(t)$, donc $u = t$ et $v' = -\dfrac{\sin t}{t}$, donne

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = x\,f(x) - \cos x + 1\ .$$

Par une autre i.p.p., on obtient

$$x\,f(x) = x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \cos x - x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\ .$$

On n'oubliera pas de justifier soigneusement à l'oral les intégrations par parties quand elles ne sont pas posées sur un segment, comme c'est le cas ici.

On a donc $F(x) = 1 - x\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Allez, une dernière i.p.p. et on obtient

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; 1 + \frac{\sin x}{x} - 2x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t^3}\,\mathrm{d}t\ .$$

Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$ et $\displaystyle\left|\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t^3}\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{2x^2}$, d'où l'on tire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x) = 1$.

On a ainsi prouvé que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et que sa valeur est 1, ce que l'on peut écrire

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = 1 \, .$$

35*. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue et 1-périodique. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t$ est convergente **si et seulement si** $\displaystyle\int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t = 0$.

- -

Soit F la primitive de f nulle en zéro: $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t$. Une intégration par parties donne, pour $x \geq 1$,

$$\textbf{(*)} \qquad \int_1^x \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t = \frac{F(x)}{x} - F(1) + \int_1^x \frac{F(t)}{t^2} \, \mathrm{d}t \, .$$

Voyons maintenant comment gérer les différents termes.

La fonction f, étant continue et périodique, est bornée sur $\mathbb{R}$, posons $M = \|f\|_\infty$.

Soit $K = F(1) = \displaystyle\int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t$. Pour $x \geq 0$, la relation de Chasles et la 1-périodicité de f permet d'écrire

$$\textbf{(**)} \qquad F(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} \int_k^{k+1} f(t) \, \mathrm{d}t + \int_{\lfloor x \rfloor}^x f(t) \, \mathrm{d}t = K \lfloor x \rfloor + \int_{\lfloor x \rfloor}^x f(t) \, \mathrm{d}t \, .$$

On note que

$$\left| \int_{\lfloor x \rfloor}^x f(t) \, \mathrm{d}t \right| = \left| \int_0^{x - \lfloor x \rfloor} f(t) \, \mathrm{d}t \right| \leq \int_0^{x - \lfloor x \rfloor} \big| f(t) \big| \, \mathrm{d}t \leq \int_0^1 \big| f(t) \big| \, \mathrm{d}t \leq M \, .$$

Distinguons maintenant les deux cas:

- si $K = 0$, alors F est bornée sur $\mathbb{R}$ d'après **(**)**, puis $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$, et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2} \, \mathrm{d}t$ est absolument convergente (*par comparaison avec celle de* $t \mapsto \dfrac{M}{t^2}$), on déduit alors de **(*)** la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t$.

- si $K \neq 0$, alors $F(x) \sim K \lfloor x \rfloor \sim Kx$ lorsque x tend vers $+\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = K$, mais l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2} \, \mathrm{d}t$ est divergente puisque $\dfrac{F(t)}{t^2} \sim \dfrac{K}{t}$ au voisinage de $+\infty$; on déduit cette fois de **(*)** la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t$.