Suites de fonctions. Études d'exemples.

1. On considère la suite de fonctions (f_n) définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^2\, x\,(1-x)^n$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, étudier les variations de la fonction f_n sur l'intervalle $[0,1]$.

b. Étudier la convergence (simple, uniforme) de la suite (f_n) sur $[0,1]$.

c. A-t-on $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\,\mathrm{d}x$?

d. Montrer que, pour tout $\alpha \in]0,1[$, il y a convergence uniforme de la suite (f_n) sur le segment $[\alpha, 1]$.

2. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{n\,(1+x^n)}\ .$$

3.a. Montrer l'inégalité $\forall u \in \mathbb{R} \quad 0 \le 1 - \cos u \le |u|$.

b. On pose $f_n(x) = \cos(x\, e^{-nx^2})$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence simple, puis uniforme, de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}$.

4. Soit la fonction $\varphi : x \mapsto 2x(1-x)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = \varphi^n = \varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi$ (n facteurs, la fonction f_n est l'**itérée n-ième** de φ). Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $I =]0,1[$ vers une fonction f que l'on précisera. Soit un réel $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, montrer que la convergence est uniforme sur le segment $J = [a, 1-a]$. *On essaiera de préciser les images itérées de ce segment J, c'est-à-dire les ensembles $f_n(J) = \varphi^n(J)$.*

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f_n(x) = x^2\, \sin\left(\dfrac{1}{nx}\right)$. On pose aussi $f_n(0) = 0$.

a. Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}$.

b. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[-a, a]$, avec $a > 0$.

Suites de fonctions. Exercices théoriques.

6. On suppose qu'une suite de fonctions (f_n) de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ converge uniformément vers $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, et on considère une suite (x_n) d'éléments de $[a,b]$ convergeant vers x. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

7. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et non identiquement nulle, telle que $f(0) = f(1) = 0$. Pour tout n entier naturel non nul, on définit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n\, f(nx) & \text{si} \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}\ .$$

a. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[0,1]$. Cette convergence est-elle uniforme ?

b. Montrer que la convergence est uniforme sur $[a,1]$ pour tout a tel que $0 < a < 1$.

c. Comparer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\,\mathrm{d}x$.

8*. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que cette suite converge uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction f est polynomiale.

9*. Soit $a \in [0,1]$. On définit une suite de fonctions (f_n), sur $\mathbb{R}_+$, par $f_0(x) = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(at)\, \mathrm{d}t \; .$$

a. Montrer que les fonctions f_n sont polynomiales.

b. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \; .$$

c. En déduire la convergence simple, sur $\mathbb{R}_+$, de la suite de fonctions (f_n).

d. Montrer que cette convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}_+$. Montrer que la fonction limite f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et vérifie $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f'(x) = f(ax)$.

e. Cas $a = 1$.

Séries de fonctions.

10. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$. En déduire la valeur des intégrales

$$I_n = \int_0^\pi \frac{2\cos x - 1}{5 - 4\cos x}\, \cos nx \, \mathrm{d}x \qquad (n \in \mathbb{N}) \; .$$

11. Soit α un réel. Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = n^\alpha x^n (1-x)$. Étudier le mode de convergence de la suite de fonctions (f_n), puis de la série de fonctions $\sum f_n$.

12. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x}$ lorsque la série est convergente. On notera $u_n(x) = e^{-n^2 x}$.

a. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout entier naturel k, exprimer $f^{(k)}(x)$ comme somme d'une série.

c. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

e. Posons $s_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(x)$. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} s_n(x)$, en déduire $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

13. Démontrer la relation $\quad \forall x \in [-1,1] \quad \operatorname{Arctan} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2n+1}$.

14. Soit $\alpha > 0$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $u_n(x) = x^\alpha \, e^{-nx^2}$.

a. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, et normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. Déterminer la fonction somme.

b. Pour quelles valeurs de α la convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?

15. On pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ (fonction zéta de Riemann). Quel est l'ensemble de définition de ζ ?

Variations de la fonction ζ. Limite en $+\infty$. Équivalent en 1^+.

16. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\,(x+n)}$. On pose $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

a. Rappeler l'énoncé complet du critère spécial des séries alternées, y compris ce qui concerne la majoration et le signe du reste. Que peut-on dire du signe de la somme de la série ?

b. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$. Quel est le signe de $g(x)$? Calculer $g(0)$.

c. Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$, décroissante, et que g''est positive sur $\mathbb{R}_+$.

d. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$. Donner l'allure de la courbe représentative de g sur $\mathbb{R}_+$.

17.a. Montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x^2}$$

et exprimer f comme somme d'une série de fonctions.

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle est décroissante sur cet intervalle.

c. Donner des équivalents de $f(x)$ lorsque $x \to 0^+$ et lorsque $x \to +\infty$.

18*. Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{n^x \, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

a. Montrer l'existence de $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} f_n(x)$.

b. On rappelle le développement asymptotique $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$, où γ est la constante d'Euler. Montrer la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \ln\big(\Gamma(x)\big) = -\ln(x) - \gamma\, x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \right).$$

c. Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

19. Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k} \Big)$.

a. Montrer que la fonction S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Former une relation entre $S(x)$ et $S(x+1)$.

c. Donner un équivalent de $S(x)$ en 0, en $+\infty$.

20*. Soit $z \in \mathbb{C}$. Par une interversion somme-limite, montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z \ .$$

Retrouver le résultat en considérant module et argument de $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.

21. Soit (a_n) une suite positive décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose

$$u_n(x) = a_n x^n (1-x) \ .$$

a. Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

b. Montrer que la convergence est normale si et seulement si la série $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.

c*. Montrer que la convergence est uniforme si et seulement si $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

22. Soit $\alpha > 1$.

a. Ensemble de définition D de la fonction $S_\alpha : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + n^\alpha x^2}$. La fonction S_α est-elle continue sur D ?

b. Donner un équivalent de $S_\alpha(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

c. La fonction S_α est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$? Si oui, donner la valeur de son intégrale.

Pour tout réel $s > 1$, on pourra poser $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ (fonction zéta de Riemann).

23*. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $x \in \left]0, \frac{1}{3}\right]$, on pose $g(x) = \dfrac{f(3x) - f(x)}{3}$.

On suppose dans cet exercice que la fonction g admet une limite réelle a en 0.

En considérant la série de fonctions $\sum g_k$, avec $g_k(x) = \dfrac{1}{3^k}\, g\left(\dfrac{x}{3^k}\right)$, montrer que f est dérivable en 0, et exprimer $f'(0)$ à l'aide du réel a. *Réponse:* $f'(0) = \dfrac{a}{2}$.