DEVOIR de MATHÉMATIQUES facultatif TOUSSAINT
PSI2 2023-2024

PROBLÈME

Dans tout ce problème, on notera f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le segment $[-1,1]$ à valeurs réelles. L'intégrale de f sur ce segment sera notée $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour tout entier naturel k, on notera $M_k(f) = \displaystyle\max_{x\in[-1,1]} \left|f^{(k)}(x)\right|$.

On posera aussi $\|f\|_\infty = M_0(f) = \displaystyle\max_{x\in[-1,1]} \left|f(x)\right|$.

On considérera n points **distincts**, notés $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$, appartenant à l'intervalle $[-1,1]$, et on notera A_n le polynôme $A_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X-a_k)$.

La **PARTIE C.** *peut se traiter indépendamment de la* **PARTIE B.**

PARTIE A.

1.a. Question de cours : énoncer le théorème de Rolle.

b. Soit $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$, s'annulant en $n+1$ points distincts de l'intervalle $[-1,1]$. Montrer qu'il existe un réel c dans $]-1,1[$ tel que $g^{(n)}(c) = 0$.

2.a. On fixe un indice $i \in [\![0, n-1]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i appartenant à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, vérifiant $L_i(a_i) = 1$, et $L_i(a_j) = 0$ pour tout $j \neq i$, $0 \leq j \leq n-1$. Donner une expression factorisée de ce polynôme L_i.

b. Montrer que la famille $\mathcal{L} = (L_0, \cdots, L_{n-1})$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On l'appelle **base de Lagrange** associée aux points a_i.

c. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ un polynôme. Donner les coordonnées de P dans la base $\mathcal{L}$.

d. Montrer qu'il existe un unique polynôme, que l'on notera P_f, dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, tel que $P_f(a_i) = f(a_i)$ pour tout i $(0 \leq i \leq n-1)$. Donner la décomposition du polynôme P_f dans la base de Lagrange $\mathcal{L}$.

Dans toute la suite, on posera $J_n(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P_f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Que dire de $I(f)$ et $J_n(f)$ lorsque f est une fonction polynomiale de degré au plus $n-1$?

4. Soit x un élément de $[-1,1]$ fixé, distinct de chacun des réels a_i.

a. Justifier l'existence et l'unicité d'un réel, noté λ_x, tel que $f(x) - P_f(x) - \lambda_x\, A_n(x) = 0$.

b. Soit la fonction $g_x : t \mapsto f(t) - P_f(t) - \lambda_x\, A_n(t)$. Calculer $g_x(a_i)$ pour tout i $(0 \leq i \leq n-1)$. En déduire qu'il existe un réel c_x de l'intervalle $]-1,1[$ tel que $g_x^{(n)}(c_x) = 0$.

c. Démontrer la relation $\lambda_x = \dfrac{f^{(n)}(c_x)}{n!}$.

5. En déduire que, pour tout réel x de $[-1,1]$, on a $|f(x) - P_f(x)| \leq \dfrac{M_n(f)}{n!}\,|A_n(x)|$, puis établir l'inégalité

$$\left|I(f) - J_n(f)\right| \leq \frac{M_n(f)}{n!} \int_{-1}^{1} |A_n(x)|\,\mathrm{d}x\ .$$

PARTIE B.

6. Un peu d'informatique.

a. Écrire en langage Python une fonction `lagrange(l,i,x)` prenant pour arguments une liste `l=`$[a_0, \cdots, a_{n-1}]$ dont on supposera que les éléments sont des réels deux à deux distincts de l'intervalle $[-1,1]$, un entier `i` entre 0 et `len(l)-1`, un réel `x`, et retournant la valeur de $L_i(x)$, les notations étant celles de la question **2.a.**

b. Écrire en langage Python une fonction `interpol(f,l,x)` prenant pour arguments une fonction `f` supposée définie sur $[-1,1]$, une liste `l` dont on supposera que les éléments sont des réels deux à deux distincts de l'intervalle $[-1,1]$, un réel `x`, et retournant la valeur de $P_f(x)$, les notations étant celles de la question **2.d.**

c. Dans cette question, on pose $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$. Avec Python, représenter graphiquement sur le même schéma les fonctions f et P_f, les points d'interpolation a_i $(0 \leq i \leq n-1)$ formant une subdivision régulière du segment $[-1,1]$, d'abord avec $n = 5$ puis avec $n = 11$. Qu'observe-t-on ?

7. Étude de la subdivision régulière.

Dans cette question, on suppose que $a_0 = -1$, $a_{n-1} = 1$ *et que les points* a_0, a_1, $\cdots$, a_{n-1} *sont régulièrement répartis.*

a. Donner l'expression de a_k $(0 \leq k \leq n-1)$.

b. Soit x un réel de l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ $\quad(0 \leq k \leq n-2)$. Justifier l'inégalité

$$|A_n(x)| \leq \left(\frac{2}{n-1}\right)^n (k+1)!\,(n-k-1)!$$

c. En déduire que $\quad \forall x \in [-1,1] \quad |A_n(x)| \leq \left(\dfrac{2}{n-1}\right)^n (n-1)!$

d. On rappelle l'équivalent de Stirling : $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. Montrer que, pour n assez grand, on a $\|A_n\|_\infty \leq \left(\dfrac{2}{e}\right)^n$. Quelle conséquence peut-on en tirer sur le mode de convergence de la suite de fonctions (A_n) sur $[-1,1]$?

e. Calculer $A_n\Big(1 - \dfrac{1}{n-1}\Big)$. Montrer que $\left|A_n\Big(1-\dfrac{1}{n-1}\Big)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{n}\left(\dfrac{2}{e}\right)^n$, où K est un réel strictement positif que l'on déterminera.

8. Polynômes de Tchebychev et points de Tchebychev.

Pour n entier naturel et $x \in [-1,1]$, on pose $T_n(x) = \cos\big(n \ \mathrm{Arccos}(x)\big)$.

a. Transformer l'expression $T_{n-1}(x) + T_{n+1}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1,1]$. En déduire la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [-1,1] \qquad T_{n+2}(x) = 2x\,T_{n+1}(x) - T_n(x)\ .$$

b. Expliciter T_0, T_1, T_2 et T_3.

c. Montrer que T_n est une fonction polynomiale, préciser son terme dominant (terme de plus haut degré).

d. Montrer que, pour tout n entier naturel, on a $\|T_n\|_\infty = \max\limits_{x\in[-1,1]} \big|T_n(x)\big| = 1$.

e. Rechercher les racines du polynôme T_n, on les notera $a_0, \cdots, a_{n-1}$ en les rangeant dans l'ordre croissant ($a_0 < \cdots < a_{n-1}$).

f. Quel lien y a-t-il alors entre le polynôme A_n défini dans le préambule à l'aide de ces points a_k ($0 \leq k \leq n-1$), et le polynôme T_n ? En déduire $\|A_n\|_\infty$. Comparer avec ce que l'on a obtenu en **7.d.** et **7.e.**

g. On reprend l'exemple de $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$. Avec Python, représenter graphiquement sur le même schéma les fonctions f et P_f, les points d'interpolation a_k ($0 \leq k \leq n-1$) étant ceux définis en **8.e.** ci-dessus, avec $n = 11$ puis avec $n = 17$. Commenter.

9. Optimalité des points de Tchebychev.

On reprend les notations de la question **8.**, i.e. on note T_n le n-ème polynôme de Tchebychev, on note $a_0, \cdots, a_{n-1}$ ses racines rangées dans l'ordre croissant, et on pose $A_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} T_n$, ainsi $A_n = \displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}(X - a_i)$ est un polynôme unitaire et on a $\|A_n\|_\infty = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ d'après **8.d.**

L'objectif de cette partie est de prouver que, si P est un polynôme unitaire de degré n, alors $\|P\|_\infty = \displaystyle\max_{x\in[-1,1]} \big|P(x)\big| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$.

a. Montrer qu'il y a exactement $n+1$ points de l'intervalle $[-1,1]$ vérifiant $\big|T_n(x)\big| = 1$, on les notera $c_0, c_1, \cdots, c_n$ en les rangeant dans l'ordre croissant ($-1 \leq c_0 < c_1 < \cdots < c_{n-1} < c_n \leq 1$). Expliciter c_k pour $k \in [\![0, n]\!]$.

b. Préciser la valeur de $A_n(c_k)$.

On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, unitaire, de degré n, tel que $\|P\|_\infty < \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

c. Que peut-on dire du degré du polynôme $A_n - P$? Quel est le signe de $A_n(c_k) - P(c_k)$?

d. Obtenir une contradiction, et expliquer en quoi cela prouve l'optimalité des points de Tchebychev pour la théorie de l'interpolation.

PARTIE C.

10.a. On considère l'application T de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ vers $\mathbb{R}^{2n}$ définie par la relation

$$T \;:\; Q \mapsto \big(Q(a_0), \cdots, Q(a_{n-1}), Q'(a_0), \cdots, Q'(a_{n-1})\big)\ .$$

Montrer que T est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

b. Expliciter l'unique polynôme Q de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ vérifiant $\begin{cases} \forall i \in [\![0, n-1]\!] \quad Q(a_i) = 0 \\ \forall i \in [\![1, n-1]\!] \quad Q'(a_i) = 0 \\ Q'(a_0) = 1 \end{cases}$.

c. Montrer qu'il existe un unique polynôme, que l'on notera Q_f, de degré inférieur ou égal à $2n-1$, vérifiant

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!] \qquad Q_f(a_i) = f(a_i) \quad \text{et} \quad Q_f'(a_i) = f'(a_i)\ .$$

On ne demande pas d'expliciter Q_f. Dans toute la suite, on posera $K_n(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} Q_f(x)\,\mathrm{d}x$.

11. Que dire de $I(f)$ et $K_n(f)$ lorsque f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $2n-1$?

12.a. En s'inspirant de la question **4.** et en introduisant des fonctions de la forme $h_x : t \mapsto h_x(t) = f(t) - Q_f(t) - \mu_x\, A_n(t)^2$, où μ_x est un réel que l'on choisira en fonction du réel $x \in [-1,1]$ distinct des a_i, montrer la majoration

$$\forall x \in [-1,1] \qquad |f(x) - Q_f(x)| \leq \frac{M_{2n}(f)}{(2n)!}\, A_n(x)^2\ .$$

b. En déduire la majoration $|I(f) - K_n(f)| \leq \dfrac{M_{2n}(f)}{(2n)!} \displaystyle\int_{-1}^{1} A_n(x)^2\, \mathrm{d}x.$

c. Que vaut le polynôme Q_f lorsque f est la fonction polynomiale A_n^2 ? Montrer que, dans ce cas, l'inégalité du **b.** est une égalité.