CONTRÔLE de MATHÉMATIQUES numéro 1

PSI2 2023-2024 **Durée : 30 minutes environ** **19/10/2023**

ÉNONCÉ: Discuter en fonction du réel α la nature des intégrales suivantes:

$$I_\alpha = \int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \quad ; \qquad J_\alpha = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t \quad ; \qquad K_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(t-1)^\alpha}\,\mathrm{d}t\ .$$

UN CORRIGÉ

Notons d'abord que les fonctions considérées sont toutes à valeurs positives sur les intervalles proposés. La convergence de l'intégrale équivaut donc à sa convergence absolue, et donc à l'intégrabilité de la fonction (l'intégrande) sur l'intervalle.

a. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^\alpha}$ est continue et positive sur $]0,1]$ et, de l'équivalent classique $1-\cos(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$, on déduit l'équivalent $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}\,t^{2-\alpha} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{t^{\alpha-2}}$. Le cours indique que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{\alpha-2}}$ est intégrable en 0 (ou sur $]0,1]$) si et seulement si $\alpha-2<1$, i.e. $\alpha<3$. Par le critère des équivalents,

Bilan: l'intégrale I_α est convergente <u>si et seulement si</u> $\alpha < 3$.

b. La fonction $g : t \mapsto t^{\alpha-1}\,e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$. Deux études locales s'avèrent nécessaires:

- en la borne 0, on a $g(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{\alpha-1} = \dfrac{1}{t^{1-\alpha}}$, d'où l'intégrabilité en 0 si et seulement si $1-\alpha<1$, i.e. $\alpha>0$.
- en la borne $+\infty$, les résultats de croissance comparée donnent $t^2\,g(t) = t^{\alpha+1}\,e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et ceci quel que soit le réel α ; on a donc, dans tous les cas, $g(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$, donc g est toujours intégrable en $+\infty$.

Bilan: l'intégrale J_α est convergente <u>si et seulement si</u> $\alpha > 0$.

c. La fonction $h : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{(t-1)^\alpha}$ est continue sur $]1,+\infty[$. Deux études locales s'avèrent ici aussi nécessaires:

- en la borne 1, par translation de la variable, on peut dire que h est intégrable en 1 si et seulement si la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x^\alpha}$ est intégrable en 0 ; or, $\dfrac{\ln(1+x)}{x^\alpha} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$, d'où l'intégrabilité en 0 si et seulement si $\alpha-1<1$, soit $\alpha<2$.
- en la borne $+\infty$, si l'on se souvient par exemple des intégrales de Bertrand (ou des séries de Bertrand) étudiées en exercice (*mais le résultat de cette étude n'est pas au programme*), on peut conjecturer que le facteur $\ln(t)$ ne va pas influencer beaucoup le comportement de l'intégrale. Il est alors raisonnable d'envisager la disjonction de cas suivante:

  $\triangleright$ si $\alpha \leq 1$, alors au voisinage de $+\infty$, $h(t) \geq \dfrac{1}{(t-1)^\alpha}$ et cette fonction minorante est positive et non intégrable en $+\infty$, donc par comparaison h n'est pas intégrable en $+\infty$;

  $\triangleright$ si $\alpha > 1$, en introduisant un réel β tel que $1<\beta<\alpha$, alors $t \mapsto \dfrac{1}{t^\beta}$ est intégrable en $+\infty$, et $t^\beta h(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t^{\alpha-\beta}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, soit encore $h(t) = o\left(\dfrac{1}{t^\beta}\right)$ en $+\infty$, d'où l'intégrabilité de h en $+\infty$.

Bilan: l'intégrale K_α est convergente <u>si et seulement si</u> $1 < \alpha < 2$.

COMMENTAIRES

Il y a de nombreuses erreurs de méthode à signaler:

1. Comme on recherche une condition **<u>nécessaire et suffisante</u>** sur α pour qu'une intégrale converge, il est pertinent d'utiliser le plus possible des équivalents. On sait en effet que, si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors f est intégrable en a **si et seulement si** g est intégrable en a.

Une majoration, en revanche, ne pourra jamais donner qu'une condition **suffisante** pour qu'une intégrale converge, et certainement pas une CNS! En effet, supposons que l'on ait $0 \leq f \leq g$ sur un intervalle I ; alors l'intégrabilité de g sur I entraîne celle de f, mais... si g n'est pas intégrable, cela ne fournit aucun renseignement sur l'intégrabilité de f. Il est donc impossible d'obtenir une **CNS** sur le paramètre α à partir d'une majoration. Idem pour l'utilisation des relations de comparaison locales o et O.

2. Dans le premier exemple, il ne fallait pas scinder l'intégrale en deux: $I_\alpha = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} - \int_0^1 \frac{\cos(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$.

En effet, la convergence de l'intégrale I_α **n'est pas équivalente** à la convergence des deux intégrales du second membre (ici encore, on n'a pas une CNS, mais seulement une condition **suffisante**). Pour certaines valeurs de α, précisément si $1 \leq \alpha < 3$, l'intégrale I_α est convergente, alors que les intégrales du second membre sont toutes deux divergentes.

3. Éviter de se lancer dans des discussions a priori du style: "Premier cas: si $\alpha > 0$, deuxième cas: si $\alpha = 0$, troisième cas: si $\alpha < 0$". Il n'y a pas toujours de raison pour qu'une telle disjonction de cas soit pertinente. Une analyse préalable de la situation est indispensable avant de se lancer dans une éventuelle discussion!

Une disjonction de cas peut toutefois s'avérer pertinente après un peu de réflexion, et c'était le cas pour l'intégrale K_α au voisinage de $+\infty$ où deux raisonnements différents permettent de conclure suivant que $\alpha > 1$ ou $\alpha \leq 1$, *cf.* corrigé au verso.

4. Certains passent beaucoup de temps à chercher d'éventuels prolongements par continuité, ce qui ne sert pas à grand-chose dans ce genre de discussion. C'est d'autant plus surprenant que plusieurs d'entre eux semblent ne pas avoir compris que, si f est prolongeable par continuité en une borne réelle a, alors cela implique que f est intégrable au point a. Quelques copies font alors du hors-sujet total.

BILAN

Le bilan de ce contrôle est assez catastrophique: une moyenne de 6,26, une médiane de 5, des notes allant de 0 à 18,5 (cinq copies ont la note zéro!).

16 copies (sur 45) ont une note inférieure ou égale à 3. Les raisons:

- un manque de méthode (donc d'entraînement ?) inquiétant, comme celles et ceux mentionnés plus haut qui pensent qu'une majoration peut fournir une CNS d'intégrabilité, ou qui recherchent à tout prix un prolongement par continuité en certaines bornes ;
- quelques copies aussi sont totalement inacceptables: des brouillons inextricables sans conclusion énoncée clairement, des ratures partout à tel point qu'on ne sait plus ce qu'il faut lire et ce qu'il ne faut pas lire. Ce sont des défauts majeurs, à corriger d'urgence avant que les écrits des concours ne soient trop proches!!!