CORRIGÉ du DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 2
PSI2 2023-2024

PROBLÈME 1: Un opérateur inégral

d'après e3a, PSI, 2018

Partie A. Propriétés élémentaires de l'opérateur U_a.

1. Si $f \in \mathcal{E}$, alors f est bornée sur I, posons $M = \|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in I}\big|f(t)\big|$. Si $x \in I$, pour tout $t \in [x,+\infty[$, on a $\big|e^{-at}\ f(t)\big| \leq M\ e^{-at}$, cette fonction majorante étant intégrable sur $[1,+\infty[$ puisque $a > 0$ (intégrale de référence). Par majoration de la valeur absolue, on déduit l'intégrabilité de $t \mapsto e^{-at}\, f(t)$ sur $[x,+\infty[$, ce qui légitime la définition de $U_a(f)(x)$.

2. Posons $G(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at}\ f(t)\ \mathrm{d}t$ pour $x \in I$. Comme $t \mapsto e^{-at} f(t)$ est intégrable sur I, la relation de Chasles permet d'écrire $G(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-at}\ f(t)\ \mathrm{d}t - \int_1^{x} e^{-at}\ f(t)\ \mathrm{d}t$. Du théorème fondamental de l'analyse, on déduit alors que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec $G'(x) = -e^{-ax} f(x)$. Notons $F = U_a(f)$ pour simplifier. On a $F(x) = e^{ax}\ G(x)$, on voit donc que F est le produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, donc elle est aussi $\mathcal{C}^1$ sur I, et

$$\forall x \in I \qquad F'(x) = e^{ax}\big(a\,G(x) + G'(x)\big) = a\,F(x) - f(x)\ .$$

La fonction $F = U_a(f)$ est donc solution sur I de l'équation différentielle (E_a^f).

3. D'abord la fonction $U_a(f)$ est bien bornée sur I: en effet, avec $M = \|f\|_\infty$, on a

$$\forall x \in I \qquad \big|U_a(f)(x)\big| \leq e^{ax} \int_x^{+\infty} \big|e^{-at}\ f(t)\big|\ \mathrm{d}t \leq M\ e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at}\ \mathrm{d}t = \frac{M}{a}\ .$$

D'autre part, l'équation différentielle (E_a^f) est linéaire, on obtient donc toutes ses solutions en ajoutant à la solution particulière $U_a(f)$ la solution générale de l'équation homogène associée $y' - ay = 0$, c'est-à-dire une fonction de la forme $x \mapsto k\,e^{ax}$ avec k réel. Or, si k est non nul, la fonction $x \mapsto k e^{ax}$ n'est pas bornée sur I (limite infinie en $+\infty$), donc $x \mapsto U_a(f)(x) + k\,e^{ax}$ n'est pas non plus bornée sur I. La fonction $U_a(f)$ est donc la seule solution de (E_a^f) qui soit bornée sur I.

4. Il résulte déjà des questions **2.**et **3.** que, pour tout $f \in \mathcal{E}$, on a $U_a(f) \in \mathcal{E}$, i.e. la fonction $U_a(f)$ est continue et bornée sur I. La linéarité de U_a résulte facilement de la linéarité de l'intégrale. Ainsi, $U_a \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$.

Soit $f \in \mathcal{E}$ tel que $U_a(f) = 0$. Alors $\big(U_a(f)\big)' = 0$ puis $f = a\,U_a(f) - \big(U_a(f)\big)' = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(U_a) = \{0\}$ et l'endomorphisme U_a est injectif.

Il n'est pas surjectif puisque, pour tout $f \in \mathcal{E}$, la fonction $U_a(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Une fonction de $\mathcal{E}$ qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$, par exemple la fonction $x \mapsto \big|\sin(x)\big|$, n'a donc pas d'antécédent par U_a.

Partie B. Étude de certaines restrictions de U_a.

5. Pour $x \in I$, on a

$$U_1(\sin)(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}\ \sin(t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad U_1(\cos)(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}\ \cos(t)\ \mathrm{d}t\ .$$

Pour expliciter, calculons

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} e^{-t}\ e^{it}\ \mathrm{d}t &= \int_x^{+\infty} e^{(-1+i)t}\ \mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(-1+i)t}}{-1+i}\right]_x^{+\infty} \\ &= \frac{e^{(-1+i)x}}{1-i} = \frac{e^{-x}}{2}\ (1+i)(\cos x + i\ \sin x)\end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-x}}{2}\left[\big(\cos x - \sin x\big) + i\,\big(\cos x + \sin x\big)\right].$$

En extrayant (dans l'ordre) la partie imaginaire et la partie réelle, on déduit

$$\forall x \in I \qquad U_1(\sin)(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) \qquad \text{et} \qquad U_1(\cos)(x) = \frac{1}{2}(-\sin x + \cos x)\ ,$$

ce que l'on peut écrire $U_1(\sin) = \frac{1}{2}(\sin + \cos)$ et $U_1(\cos) = \frac{1}{2}(-\sin + \cos)$. On en déduit que le plan vectoriel $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$ est stable par l'endomorphisme U_1 et que, si l'on note V_1 l'endomorphisme induit, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(V_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6.a. Chaque fonction g_k est continue sur I et a une limite nulle en $+\infty$ (par croissances comparées). Avec $\varepsilon = 1$ dans la définition de la limite, on déduit qu'il existe $A \geq 1$ tel que, pour $x \geq A$, on ait $\big|g_k(x)\big| \leq 1$, et g_k est par ailleurs bornée sur $[1, A]$ car elle est continue sur ce segment, on en déduit qu'elle est bornée sur I. Donc $g_k \in \mathcal{E}$ pour tout k entier naturel.

Soient $\lambda_0, \cdots, \lambda_p$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \lambda_k g_k = 0$. Après simplification par e^{-x} qui ne s'annule pas, il vient $\forall x \in I \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \lambda_k x^k = 0$, le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \lambda_k X^k$ admet alors une infinité de racines, ce qui entraîne la nullité de tous les coefficients λ_k. La famille $\mathcal{B}_p$ est donc libre, c'est donc une base de l'espace vectoriel $\mathcal{G}_p$ introduit juste après.

b. Il suffit de montrer que, pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, on a $G_k = U_a(g_k) \in \mathcal{G}_p$. Or, pour tout $x \in I$, avec le changement de variable $t = x + u$ et la formule du binôme,

$$\begin{aligned} G_k(x) &= e^{ax} \int_x^{+\infty} t^k\, e^{-(a+1)t}\, \mathrm{d}t \\ &= e^{ax} \int_0^{+\infty} (u + x)^k e^{-(a+1)(u+x)}\, \mathrm{d}u \\ &= e^{-x} \int_0^{+\infty} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\, u^{k-j}\, x^j\, e^{-(a+1)u}\, \mathrm{d}u \\ &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_{j,k}\, x^j\, e^{-x} \end{aligned}$$

en posant $\alpha_{j,k} = \displaystyle\binom{k}{j} \int_0^{+\infty} u^{k-j}\, e^{-(a+1)u}\, \mathrm{d}u.$

Donc $G_k = U_a(g_k) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \alpha_{j,k}\, g_j \in \mathrm{Vect}(g_0, \cdots, g_k) = \mathcal{G}_k \subset \mathcal{G}_p$, et le sous-espace $\mathcal{G}_p$ est stable par l'endomorphisme U_a.

c. La matrice de l'endomorphisme induit $V_a^{(p)}$ dans la base $\mathcal{B}_p$ de l'espace vectoriel $\mathcal{G}_p$ est la matrice $M = (\alpha_{j,k})_{0 \leq j,k \leq p} \in \mathcal{M}_{p+1}(\mathrm{I\!R})$. On observe que $\alpha_{j,k}$ est nul pour $j > k$ donc cette matrice est triangulaire supérieure. Ses coefficients diagonaux sont les $\alpha_{j,j} = \dfrac{1}{a+1}$.

Partie C. Propriétés des fonctions conservées par l'opérateur U_a.

7. Soit $f \in \mathcal{E}$, on a alors $|f| \in \mathcal{E}$ et, pour tout $x \in I$,

$$\big|U_a(f)(x)\big| = e^{ax}\left| \int_x^{+\infty} e^{-at}\, f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at}\, \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t = U_a\big(|f|\big)(x)\ .$$

8. Si $f \geq 0$ sur I, par positivité de l'intégrale, on a $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at}\, f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$, donc $U_a(f)(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

9. Si f est décroissante sur I, on a $f(t) \leq f(x)$ pour $t \in [x, +\infty[$, donc

$$\forall x \in I \qquad a \cdot U_a(f)(x) = a\, e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at}\, f(t)\,\mathrm{d}t \leq a\, e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at}\, f(x)\,\mathrm{d}t = f(x)$$

Comme la fonction $U_a(f)$ est solution de l'équation différentielle (E_a^f), on a donc

$$\forall x \in I \qquad \big(U_a(f)\big)'(x) = a \cdot U_a(f)(x) - f(x) \leq 0\ ,$$

et la fonction $U_a(f)$ est décroissante sur I.

10.a. C'est la définition de la limite: comme $a\varepsilon$ est un réel strictement positif, on a bien $\big|f(t)\big| \leq a\varepsilon$ pour t suffisamment grand, i.e. pour t plus grand qu'un certain réel A.

b. Revenons à la définition de la limite: soit $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe $A \geq 1$ tel que, pour $t \geq A$, on ait $\big|f(t)\big| \leq a\,\varepsilon$. Pour tout $x \geq A$, on a alors

$$\big|U_a(f)(x)\big| \leq U_a\big(|f|\big)(x) \leq e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at}\, a\,\varepsilon\,\mathrm{d}t = \varepsilon\ ,$$

ce qui montre que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} U_a(f)(x) = 0$.

11. Posons $g = f - l$. Alors $g \in \mathcal{E}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. D'après la question **10.**, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} U_a(g)(x) = 0$. Par linéarité de l'opérateur U_a, on a $f = g + l$ donc $U_a(f) = U_a(g) + U_a(l)$. Un calcul immédiat dans le cas d'une fonction constante montre que $U_a(l) = \dfrac{l}{a}$ (fonction constante). Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} U_a(f)(x) = \frac{l}{a}$.

12.a. On sait que $F = U_a(f)$ est solution de (E_a^f), on a donc $F'(t) - a\,F(t) + f(t) = 0$ pour tout $t \in I$. En intégrant cette relation sur le segment $[1, x]$ avec $x \in I$, on obtient

$$\textbf{(*)} \qquad F(x) - F(1) - a \int_1^x F(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0\ .$$

b. Puisque f est positive, F l'est aussi (question **8.**), donc F est intégrable sur I si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, si et seulement si les intégrales partielles $\displaystyle\int_1^x F(t)\,\mathrm{d}t$ sont majorées. Or, du **a.** ci-dessus, on déduit que

$$\int_1^x F(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a} \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{a}\big(F(x) - F(1)\big)\ .$$

On sait d'autre part que f est positive et intégrable, et que $F = U_a(f)$ est bornée sur I (question **3.**) donc majorée, posons $M = \sup_{x \in I} F(x)$. On a alors

$$\forall x \in I \qquad \int_1^x F(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{a}\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{a}\big(M - F(1)\big)\ ,$$

ce qui montre que les intégrales partielles sont majorées et conclut la question.

13. La fonction $|f|$ appartient à $\mathcal{E}$, est positive et intégrable sur I. D'après la question **12.**, la fonction $U_a\big(|f|\big)$ est alors intégrable sur I. Comme $\big|U_a(f)\big| \leq U_a\big(|f|\big)$ (question **7.**), on déduit l'intégrabilité de $U_a(f)$ sur I par majoration de la valeur absolue.

PROBLÈME 2: Matrices magiques

d'après de vieux manuscrits

1. On a la relation de dépendance linéaire évidente $c_1 + \cdots + c_n = l_1 + \cdots + l_n$, donc la famille est liée.

2. $F_0 = \Big(\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} l_i\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker} c_j\Big)$, donc F_0 est une intersection d'hyperplans (noyaux de formes linéaires non nulles) de E, c'est donc un sous-espace vectoriel de E.

Remarque : si on note r le rang de la famille de formes linéaires considérée à la question **1.**, on a alors $\dim F_0 = n^2 - r$. En effet, F_0 est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n^2 inconnues (les coefficients d'une matrice M) et de rang r (ces n^2 inconnues sont liées par r relations linéaires indépendantes). De la question **1.**, on déduit que $r \leq 2n - 1$, donc $\dim F_0 \geq n^2 - (2n-1) = (n-1)^2$.

3. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ donnée, la matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$m_{i,j} = a_{i,j} \quad \text{pour } (i,j) \in [\![1, n-1]\!]^2\ ;$$

$$m_{i,n} = -\sum_{j=1}^{n-1} a_{i,j} \quad \text{pour } i \in [\![1, n-1]\!]\ ;$$

$$m_{n,j} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,j} \quad \text{pour } j \in [\![1, n-1]\!]\ ;$$

$$m_{n,n} = \sum_{(i,j) \in [\![1,n-1]\!]^2} a_{i,j}$$

est clairement la seule matrice appartenant à F_0 et satisfaisant les conditions demandées.

L'application $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ qui, à toute matrice M de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe la matrice extraite de M obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne, est évidemment linéaire, sa restriction $\varphi = \Phi\Big|_{F_0}$ au sous-espace vectoriel F_0 de E est donc aussi linéaire. La propriété d'existence et d'unicité d'une matrice M de F_0 dont les éléments $m_{i,j}$ avec $(i,j) \in [\![1, n-1]\!]^2$ sont imposés (*propriété démontrée ci-dessus*) exprime exactement le caractère bijectif de l'application φ qui est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On en déduit que $\dim F_0 = \dim \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}) = (n-1)^2$, puis que le rang de la famille de formes linéaires $\mathcal{F} = (l_1, \cdots, l_n, c_1, \cdots, c_n)$ est $r = n^2 - \dim F_0 = 2n - 1$ (*cf.* remarque à la fin de la question **2.**).

4. Notons $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée à la permuation circulaire des vecteurs de base $e_1 \mapsto e_2 \mapsto \cdots \mapsto e_{n-1} \mapsto e_n \mapsto e_1$. Alors la matrice $M = I_n - P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ appartient à F_0 et $d(M) = \mathrm{tr}(M) = n \neq 0$.

Si la forme linéaire $d = \mathrm{tr}$ appartenait à $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, alors toute matrice appartenant à $F_0 = \Big(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\, l_i\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{Ker}\, c_j\Big)$ appartiendrait aussi à $\mathrm{Ker}\, d$, mais que nenni, ceci n'est point ($M = I_n - P$ ci-dessus est un contre-exemple), donc $d \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

5. La famille de formes linéaires $\mathcal{G} = (l_1, \cdots, l_n, c_1, \cdots, c_n, d)$ est donc de rang $(2n-1)+1 = 2n$. Le sous-espace G_0, intersection de leurs noyaux, est donc de dimension $n^2 - 2n$.

6. Pour $n \geq 4$, la matrice $M = \begin{pmatrix} & & 1 & -1 \\ & & -1 & 1 \\ & (0) & & \\ & & & \end{pmatrix}$ appartient à G_0 et $\delta(M) = -2 \neq 0$. Pour $n = 3$, on bricole une matrice du genre $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ qui semble répondre à la question.

7. Les exemples construits à la question **6.** montrent que $\delta \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$ (notation introduite question **5.**). La famille de formes linéaires $\mathcal{H} = (l_1, \cdots, l_n, c_1, \cdots, c_n, d, \delta)$ est donc de rang $2n+1$. L'espace vectoriel H_0, intersection des noyaux, est donc de dimension $n^2 - 2n - 1$.

8. L'ensemble H est clairement un sous-espace vectoriel de E (non vide et stable par combinaisons linéaires). On a bien sûr $H_0 \subset H$ et $\mathrm{Vect}(J_n) \subset H$ puisque $J_n \in H$. Il est immédiat que $H_0 \cap \mathrm{Vect}(J_n) = \{0\}$ puisque $J_n \notin H_0$. Enfin, si $M \in H$ est une matrice magique, en posant $s = l_1(M) = \cdots = l_n(M) = c_1(M) = \cdots = c_n(M) = d(M) = \delta(M)$, on vérifie facilement que $M_0 = M - \dfrac{s}{n} J_n$ appartient à H_0, ce qui fournit la décomposition $M = \Big(M - \dfrac{s}{n} J_n\Big) + \dfrac{s}{n} J_n$ et achève de démontrer que $H = H_0 + \mathrm{Vect}(J_n)$. En conséquence,

$$\dim H = \dim H_0 + 1 = n^2 - 2n = n(n-2)\ .$$

9. Pour $n = 3$, on a $\dim H = 3$ et une base de H est par exemple constituée des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

les matrices A et B constituant alors une base de H_0. Les matrices de H sont donc de la forme

$$M = xA + yB + zJ_3 = \begin{pmatrix} y+z & x-y+z & -x+z \\ -x-y+z & z & x+y+z \\ x+z & -x+y+z & -y+z \end{pmatrix}.$$

On résout $\{y+z=3\ ;\ x-y+z=4\ ;\ -x+z=5\}$, ce qui donne $\{x=-1\ ;\ y=-1\ ;\ z=4\}$ et la matrice recherchée est $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.