# DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 2
# COMMENTAIRES
# PSI2 2023-2024

## PROBLÈME 1

Le début de ce problème fait appel à de nombreuses notions du cours d'analyse et aussi d'algèbre. J'ai vu quelques très bonnes rédactions, mais elles sont rares, la plupart d'entre vous ayant encore une maîtrise insuffisante du cours d'analyse de 1ère année puisque c'est essentiellement cela qui est utilisé.

**1.** Beaucoup trop de mauvaises rédactions pour cette question standard de début de problème! Je rappelle donc les bons usages concernant ce type de question:

**POUR MONTRER QU'UNE INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE CONVERGE, CELA N'A PAS DE SENS DE MAJORER L'INTÉGRALE ELLE-MÊME (PUISQUE SON EXISTENCE N'EST PAS ENCORE ASSURÉE), IL CONVIENT DE MAJORER L'INTÉGRANDE**.

Bien sûr, ce qui précède vaut lorsque cet intégrande est une fonction positive. Si ce n'est pas le cas, on majore sa **valeur absolue** (ou **module**), et ce que l'on démontre alors par cette majoration est la **convergence absolue** de l'intégrale (i.e. la fonction est intégrable).

Une fois effectuée cette majoration de l'intégrande, on conclut en citant une phrase du type: "toute fonction majorée en module par une fonction intégrable est elle-même intégrable".

Attention au vocabulaire: je lis souvent que l'intégrale est intégrable!!! C'est évidemment incorrect, vous voulez probablement dire : "la fonction (sous l'intégrale) est intégrable" ou bien "l'intégrale est (absolument) convergente".

**2.** Beaucoup trop de flou dans l'utilisation du théorème fondamental de l'analyse. Il ne s'applique pas ici de façon immédiate puisque la borne variable $x$ est la borne inférieure (et non supérieure) de l'intégrale et que, d'autre part, il s'agit d'une intégrale généralisée avec une borne infinie.

Une bonne rédaction serait par exemple de dire: "soit $G : x \mapsto \displaystyle\int_1^x e^{-at}\, f(t)\, \mathrm{d}t$ la primitive de la fonction continue $g : t \mapsto e^{-at}\, f(t)$ qui s'annule au point 1, alors $G$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$", et d'exprimer ensuite $U_a(f)$ à l'aide de $G$, à savoir, par la relation de Chasles,

$$\forall x \in I \qquad U_a(f)(x) = e^{ax}\,\big(L - G(x)\big)\ ,$$

avec $L = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = \int_1^{+\infty} e^{-at}\, f(t)\, \mathrm{d}t$ dont l'existence a été montrée à la question précédente.

À noter aussi que la notation $U_a'(f)$ est assez malencontreuse: en effet, ce n'est pas l'opérateur $U_a$ que l'on dérive, mais la fonction $U_a(f)$, on doit donc noter $\big(U_a(f)\big)'$ ou encore $U_a(f)'$.

**3.** Peu de réponses complètes à cette question qui comporte en fait deux questions, puisqu'il faut montrer que la fonction $U_a(f)$ est bornée (ce dernier point a été souvent oublié), et ensuite que les autres fonctions solutions de l'équation différentielle $(E_a^f)$ ne sont pas bornées.

J'ai lu dans beaucoup de copies: "l'intégrale $U_a(f)(x)$ est convergente, donc elle est bornée". Ces deux choses n'ont rien à voir entre elles: en effet, pour $x \in I$ fixé, l'intégrale définissant $U_a(f)(x)$ est une intégrale convergente, mais ce n'est pas pour autant que la fonction $x \mapsto U_a(f)(x)$ est bornée sur $I$.

**4.** Ne pas oublier de mentionner le caractère "endo" de l'application linéaire $U_a$! Quant à l'injectivité, elle n'a rien à voir avec le "théorème de stricte positivité", les fonctions $f$ auxquelles on applique l'endomorphisme $U_a$ n'ayant aucune raison d'être positives! Enfin, l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ étant de dimension infinie, injectif n'entraîne pas surjectif!

**6.a.** Beaucoup de réponses fausses ou incomplètes pour cette question pourtant facile! Le caractère borné de $g_k$ est une conséquence de la limite nulle en $+\infty$, mais cet argument n'est pas suffisant (puisqu'il permet seulement de dire que $g_k$ est bornée **au voisinage de** $+\infty$), il faut y adjoindre, soit une étude de fonctions, soit une référence au théorème des bornes atteintes en se ramenant à un segment.

Pour la liberté de la famille $\mathcal{B}_p$, ce n'est pas bien compliqué non plus: une fois débarrassé du facteur non nul $e^{-x}$, on se retrouve avec un polynôme qui a une infinité de racines.

La **PARTIE C** comporte quelques questions peut-être plus faciles que le début du problème.

## PROBLÈME 2

Problème en général assez bien traité.

**3.** Pour affirmer que $\varphi$ est un isomorphisme, ne pas oublier de mentionner la linéarité de $\varphi$.

Enfin, pour affirmer que, **si** une application linéaire $\varphi : E \to F$ est injective, **alors** elle est bijective, **il faut déjà savoir que les espaces vectoriels $E$ et $F$ de départ et d'arrivée sont de même dimension finie**. Comme le but de la question était justement de montrer que $F_0$ et $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ ont la même dimension, on ne pouvait procéder ainsi.

Si $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ sont des formes linéaires sur un espace vectoriel $E$, beaucoup d'entre vous introduisent l'application linéaire $\Phi : E \to \mathbb{K}^k$ définie par $\forall x \in E \quad \Phi(x) = \big(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_k(x)\big)$, c'est une très bonne idée mais il n'est pas si évident que cela que l'on ait $\mathrm{rg}(\Phi) = \mathrm{rg}(\varphi_1, \cdots, \varphi_k)$, d'où mon commentaire "admettons!" sur certaines copies. En voici une preuve ci-dessous.

## UNE DÉMONSTRATION

**Proposition: Soient $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ des formes linéaires sur un espace vectoriel $E$ de dimension $n$, soit l'application linéaire $\Phi : E \to \mathbb{K}^k$ définie par $\forall x \in E$ $\Phi(x) = \big(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_k(x)\big)$, on a alors $\mathrm{rg}(\Phi) = \mathrm{rg}(\varphi_1, \cdots, \varphi_k)$.**

*Preuve: Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de $E$, soit $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \cdots, e_n^*)$ sa base duale, je rappelle qu'elle est constituée des formes linéaires coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$, i.e. pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $e_i^*$ est la forme linéaire sur $E$ telle que, pour tout $x \in E$, $e_i^*(x)$ est la i-ième coordonnée du vecteur $x$ dans la base $\mathcal{B}$, on a ainsi $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ et on en déduit facilement que $\mathcal{B}^*$ est bien une base de l'espace dual $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. On notera aussi $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{K}^k$.*

*Alors* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\Phi) = \begin{pmatrix} \varphi_1(e_1) & \cdots & \varphi_1(e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_k(e_1) & \cdots & \varphi_k(e_n) \end{pmatrix} = M \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{K})$. *Donc* $\mathrm{rg}(\Phi) = \mathrm{rg}(M)$.

*Par ailleurs, si $\psi$ est une quelconque forme linéaire sur $E$, ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}^*$ sont les scalaires $\psi(e_1), \cdots, \psi(e_n)$, autrement dit* $\psi = \sum_{i=1}^{n} \psi(e_i)\, e_i^*$. *Le lecteur sceptique* *vérifiera par exemple que les formes linéaires* $\psi$ *et* $\mu = \sum_{i=1}^{n} \psi(e_i)\, e_i^*$ *coïncident sur chaque vecteur* $e_j$ *de la base* $E$*.*

*La matrice, relativement à la base* $\mathcal{B}^*$*, de la famille de formes linéaires* $\mathcal{F} = (\varphi_1, \cdots, \varphi_k)$ *est donc*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(e_1) & \cdots & \varphi_k(e_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(e_n) & \cdots & \varphi_k(e_n) \end{pmatrix} = M^\top \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K}) \ .$$

*Ainsi, une matrice et sa transposée ayant le même rang,*

$$\mathrm{rg}(\varphi_1, \cdots, \varphi_k) = \mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{rg}(M^\top) = \mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(\Phi) \ .$$

**Commentaire.** C'est sur cette proposition (malheuresement pas tout à fait au programme) que l'on s'appuie par exemple pour affirmer que le rang d'un système linéaire (i.e. le rang de la matrice du système) est "le nombre d'équations indépendantes", et pour en déduire la formule fondamentale concernant les systèmes linéaires homogènes: **la dimension de l'espace vectoriel des solutions est égale au nombre d'inconnues, moins le nombre d'équations indépendantes.**